2018 festa della matematica

8 Gallery – Venerdì 2 marzo 2018

Gara per il pubblico – GARA A

Problema 1 – Compro, vendo, compro 15 punti

Un commerciante frenetico compra un orologio per 10 Euro, lo rivende a 20 Euro, lo ricompra a 30 Euro e lo rivende a 40 Euro.
Ha guadagnato, o perso? Quanto?

Soluzione:

Si immagini di rileggere il problema nel seguente modo: "Dopo aver venduto per 20 *euro l'articolo per cui ne ha pagati* 10*, il commerciante ha chiaramente guadagnato* 10 *euro.*
Ora il negoziante compra un altro articolo a 30 *euro e lo rivende a* 40 euro.*"In questo modo, ha di nuovo guadagnato* 10 *euro, dunque il guadagno totale è stato di* 20 *euro.*

Risposta $\boxed{0020}$

Problema 2– Divisioni 20 punti

Qual è il numero di due cifre che
diviso per 2, dà per resto 1,
diviso per 5, dà per resto 3,
diviso per 9, dà per resto 2?

Soluzione 1:

Se la divisione per due dà resto 1 *significa che il numero è dispari; inoltre un numero è divisibile per* 5 *se finisce con* 0 *oppure* 5*, quindi se la divisione per* 5 *dà resto* 3 *significa che il numero termina per* 3 *o per* 8 *(ma questa seconda possibilità è preclusa dalla prima affermazione). Quindi il numero potrebbe essere* 13, 23, 33, 43, 53, 63, 73, 83, 93. *Di questi solo il numero* 83 *è divisibile per* 9 *con resto* 2.

Soluzione 2:

Partendo dall'ultima condizione si possono trarre le seguenti informazioni.

Se $n = 2 \pmod 9$ *allora* $n + 7$ *è multiplo di* 9, *nonché di* 5 *(seconda condizione) e di* 2 *(prima condizione), quindi* $n + 7$ *è multiplo di* 90. *Poiché n ha due cifre si ha* $n = 90 - 7 = 83$.

Risposta $\boxed{0083}$

Problema 3 – Gli animali di mio zio 25 punti

In una fattoria vivono diversi animali. Sono tutti vitelli meno 16. Sono tutte mucche meno 16. Ci sono tanti cavalli quanti bovini, il resto sono conigli. Quanti animali ci sono nella fattoria? Poiché dalle informazioni date vi possono essere più soluzioni, dare come risposta quella che dà come risultato il numero maggiore.

Soluzione:

Poniamo per sintetizzare: V = *numero di vitelli,* M = *numero di mucche,* K = *numero di cavalli e* C = *numero di conigli.*
Il numero totale di animali è T = V + 16 = M + 16, *da cui* V = M.
Sappiamo che K = M + V = 2M = 2V, *quindi* T = 2M + K + C = 4M + C.
Infine M + 16 = 4M + C, *cioè* 3M = 16 – C *o anche* C = 16 – 3M.
Deduciamo $0 < M \le 5$ *(il testo garantisce la pluralità degli animali). Abbiamo i seguenti casi espressi dalla tabella:*

	M	V	K	C	T
1° caso	1	1	2	13	17
2° caso	2	2	4	10	18
3° caso	3	3	6	7	19
4° caso	4	4	8	4	20
5° caso	5	5	10	1	21

Risposta $\boxed{0021}$

Problema 4 – La giostra 30 punti

Una giostra a catene ruota con velocità tangenziale di 5 *m/s*; il raggio della giostra è di 8 metri. Luigi, che si trova esattamente nel centro di rotazione della giostra, fermo rispetto al terreno, vuole cercare di colpire con una pallina da tennis il suo amico Marco che si trova su un seggiolino della giostra. Sapendo che all'istante di lancio Marco si trova esattamente alle spalle di Luigi e, sapendo che i seggiolini si trovano ad altezza 3 metri rispetto al punto di lancio, a che velocità, in *mm/s,* dovrà lanciare la pallina Luigi di fronte a sé? Si immagini che la pallina non subisca attrito con l'aria e che la traiettoria sia rettilinea. Se dovesse servire, porre $\pi = 3{,}14$.

Soluzione:

La distanza, in metri, che deve coprire la pallina è $\sqrt{8^2+3^2}=\sqrt{73}\cong 8{,}544$. *Marco, per percorrere mezza circonferenza, di lunghezza* 8π *metri, impiega* $\frac{8\pi}{5}$ *secondi. La velocità richiesta è quindi (in m/s)* $v = \dfrac{\sqrt{73}}{\frac{8\pi}{5}} = \dfrac{5\sqrt{73}}{8\pi} \cong 1{,}700$. *Infine v* = 1700 *mm/s.* **Risposta** $\boxed{1700}$

Problema 5 – Corsa al 100 — 30 punti

Inserite esattamente tre simboli, scelti fra addizione (+) e sottrazione (−) , tra le cifre

1 2 3 4 5 6 7 8 9

in modo che il risultato sia 100. Non è consentito cambiare l’ordine delle cifre né inserire parentesi o altri simboli. Una volta trovata la soluzione, scambiate ogni simbolo di addizione con quello di sottrazione e viceversa. Indicate come risposta il risultato del calcolo ottenuto con i tre simboli invertiti.

Soluzione:

123 – 45 – 67 + 89 = 100.
Scambiando le operazioni otteniamo: 123 + 45 + 67 – 89 = 146

Risposta $\boxed{0146}$

Problema 6 – Il pallone dei mondiali — 35 punti

Fra pochi mesi si terranno in Russia i campionati mondiali di calcio, cui però, per la prima volta dopo oltre mezzo secolo, la nazionale italiana non ha ottenuto la qualificazione. I matematici italiani appassionati di calcio si consolano così pensando alle forme dei palloni usati negli ultimi due campionati mondiali che hanno visto il successo degli "Azzurri" (in Spagna nel 1982 ed in Germania nel 2006). Nel 1982 il pallone si chiamava "Tango Espana" ed era formato da 32 pannelli curvi saldati fra loro (12 pentagonali ed i restanti esagonali, tutti regolari), mentre 24 anni più tardi il pallone era il "Teamgeist", formato da 14 pannelli (8 esagonali regolari e i rimanenti quadrati) saldati termicamente secondo le più moderne tecnologie.
Percentualmente quante saldature sono state "risparmiate" dall'azienda produttrice passando dal Tango al Teamgeist?

Soluzione :

Si osservi innanzitutto che ogni cucitura lega fra loro due pannelli adiacenti, pertanto il numero di cuciture è pari al numero di spigoli del solido, ovvero alla metà del numero complessivo di lati dei poligoni che costituiscono le facce del solido.
Il pallone del 1982*, formato da* 12 *pentagoni e* 20 *esagoni, essendo cioè ottenuto gonfiando un poliedro archimedeo detto "icosaedro troncato", possedeva* 90 *saldature in quanto:*

$$\frac{12\cdot 5+20\cdot 6}{2}=90\,.$$

Il pallone del 2006*, formato da* 8 *esagoni e* 6 *quadrati, essendo cioè ottenuto gonfiando un altro solido archimedeo detto "ottaedro troncato", possedeva solamente* 36 *saldature in quanto:*

$$\frac{8 \cdot 6 + 6 \cdot 4}{2} = 36 .$$

Pertanto l'azienda produttrice ha "risparmiato" 54 *cuciture, pari al* 60% *delle* 90 *saldature inizialmente necessarie.*

Risposta $\boxed{0060}$

Problema 7 – Super software 40 punti

Un'azienda di informatica sta studiando un software che frena automaticamente l'automobile quando si accorge della presenza di un ostacolo fermo davanti all'auto in movimento. Si effettuano dei test per determinare il tempo di reazione del software alzando improvvisamente una barriera di fronte ad un'auto in movimento a velocità costante. Quando l'auto viaggia a 52 *km/h* lo spazio percorso prima dell'arresto è di 25 metri, quando la velocità è di 80 *km/h* lo spazio di arresto sale a 57 metri. Quanto tempo, in millesimi di secondo, impiega il software per accorgersi della presenza dell'ostacolo sulla strada?
Si supponga che la frenata avvenga a decelerazione costante ed il moto precedente alla frenata sia rettilineo uniforme.

Soluzione:

Poniamo: $v_1 = 52\,km/h,\quad s_1 = 0{,}025\,km$ *(1° caso).*
$v_2 = 80\,km/h,\quad s_2 = 0{,}057\,km$ *(2° caso).*

Prima che il software agisca trascorre un tempo t durante il quale l'auto percorre un certo spazio a velocità costante. In seguito l'auto decelera, fino a fermarsi, percorrendo il rimanente spazio con un moto uniformemente "decelerato". La somma dei suddetti tratti di strada è data dal testo. Abbiamo quindi il sistema:

$$\begin{cases} v_1 t + \frac{1}{2} a t_1^{\,2} = s_1 \\ v_2 t + \frac{1}{2} a t_2^{\,2} = s_2 \end{cases} \quad \text{con} \quad t_1 = \frac{v_1}{a} \quad e \quad t_2 = \frac{v_2}{a}. \text{ Risolvendo:}$$

$$\begin{cases} v_1 t + \frac{v_1^{\,2}}{2a} = s_1 \\ v_2 t + \frac{v_2^{\,2}}{2a} = s_2 \end{cases}. \text{ Poniamo } \frac{1}{a} = x \text{ (a è diverso da zero). Troviamo: } \begin{cases} v_1 t + \frac{v_1^{\,2} x}{2} = s_1 \\ v_2 t + \frac{v_2^{\,2} x}{2} = s_2 \end{cases}.$$

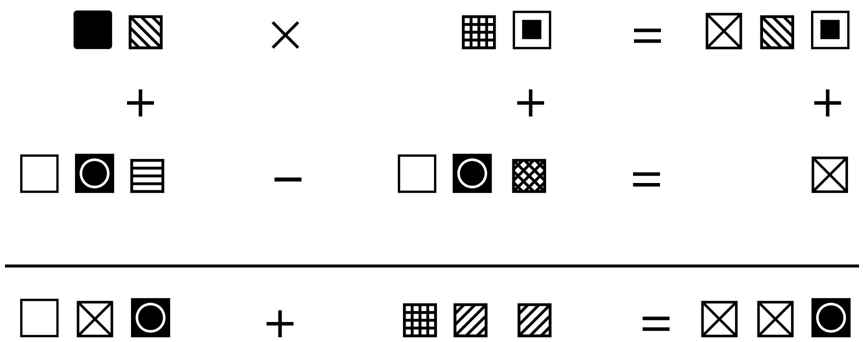
Sostituendo i dati noti: $\begin{cases} 52t + 1352x = 0{,}025 \\ 80t + 3200x = 0{,}057 \end{cases}$. *Dalla seconda equazione otteniamo*

$x = \dfrac{0{,}057 - 80t}{3200} = 0{,}000017812 - 0{,}025t$. *Sostituendo:*

$118{,}2t = 0{,}000918176$ *, da cui* $t \cong 0{,}000050449$ *, calcolato in ore, quindi* $t \cong 0{,}181\ldots$ *secondi.*

Risposta $\boxed{0181}$

Problema 8 – Calcolo enigmatico 50 punti

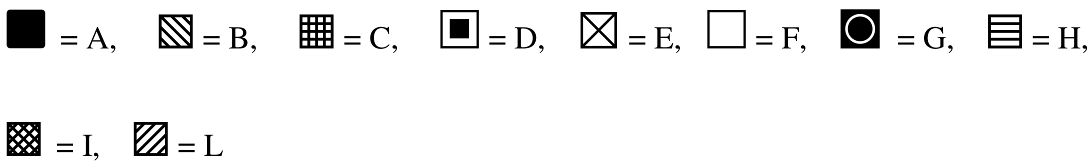


A segno uguale corrisponde cifra uguale (e a segno diverso cifra diversa).

Quale numero corrisponde alla stringa  ?

Soluzione:

Sostituiamo lettere ai simboli in questo modo:



Otteniamo così:

AB	×	C D	=	EBD
+		+		+
FGH	–	FG I	=	E
FEG	+	CLL	=	EEG

Dall'ultima somma orizzontale ricaviamo **L = 0**. *Deduciamo* D + I = 10, C + G = 9 *ed anche* C = F + 1 (2ª *somma verticale*). *Dovrà essere quindi* D ≠ 5 *e* I ≠ 5 *(infatti a lettera diversa corrisponde cifra diversa). Dalla 3ª somma verticale si ha* E = B + 1. *Dalla moltiplicazione (orizzontale) se* B *fosse dispari avremmo* D = 5, *non ammesso. Notiamo che può essere solo* **B = 6** *(moltiplicazione orizzontale), quindi* **E = 7**, *e che* D *può assumere solamente i valori* 2, 4, 8, *anzi* D > 2 *(3ª somma v). Se fosse* D = 4 *avremmo* G = 1 *(3ª somma v.), da cui* C = 8, I = 6 = B*: non accettabile. Quindi è* **D = 8**, *da cui* **I = 2**, **G = 5** *(3ª somma v.), conseguentemente* **C = 4**, **F = C–1 = 3** *(2ª somma v.),* **H = 9** *e* **A = 1** *(1ª somma v.), soluzione unica.*
La stringa GAID *corrisponde dunque al numero* 5128.

Risposta $\boxed{5128}$

Problema 9 – Caso 2018 per l'ispettore di M. Smullyan 60 punti

In un caso di furto sono coinvolti quattro imputati, A, B, C, D. Vengono accertati i seguenti quattro fatti:

1) Se uno, fra A e B, è innocente, allora C è colpevole.
2) Se D è colpevole, almeno uno, tra A e C, è stato suo complice.
3) Se C è innocente, allora D è colpevole.
4) Se B e D sono colpevoli, allora C è innocente.

Alla luce dei suddetti fatti, calcolare la probabilità P(A) che A sia colpevole.
Si ipotizzi l'equiprobabilità degli eventi elementari che verranno individuati.
Dare come risposta la parte intera di $1000 \times P(A)$.

Soluzione:

Formalizziamo dapprima le frasi.

Si intenda A = "A è colpevole" , ecc. 0 = FALSO
$\neg$ A = "A è innocente", ecc. 1 = VERO

Avremo:

1) $[(\neg A) \vee (\neg B)] \rightarrow C$, *cioè* $\neg(A \wedge B) \rightarrow C$ *(legge di De Morgan), quindi*
$\neg C \rightarrow (A \wedge B)$ *(legge di contrapposizione, utilizzata nella dimostrazione per assurdo)*
2) $D \rightarrow (A \vee C)$
3) $\neg C \rightarrow D$
4) $(B \wedge D) \rightarrow \neg C$

Costruiamo la tavola di verità:

									1	2	3	4
	A	**B**	**C**	**D**	**nC**	**A∧B**	**A∨C**	**B∧D**	**nC→(A∧B)**	**D→(A∨C)**	**nC→D**	**(B∧D)→nC**
1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1
2	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1
3	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1
4	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1
5	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1
6	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1
7	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1
8	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0
9	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1
10	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1
11	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1
12	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1
13	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1
14	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
15	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1
16	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0

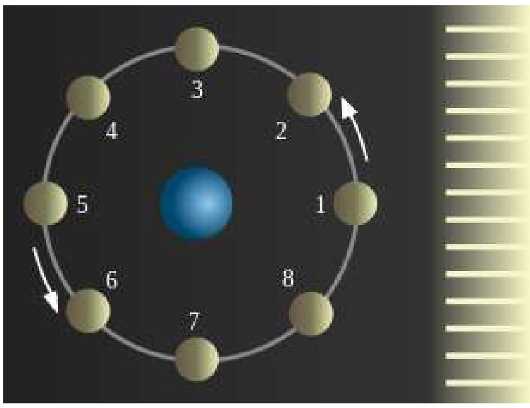
Poiché i fatti (1), (2), (3), (4) *sono stati accertati (quindi supposti veramente accaduti), considerando quindi solo le righe (in rosso) della tabella corrispondenti alle situazioni in cui tutte le* 4 *frasi hanno valore di verità* 1, *si nota che, nei riguardi di* A, *si hanno* 4 *casi "*1*" su* 7 *complessivi (considerati "equiprobabili", date le nostre informazioni).*

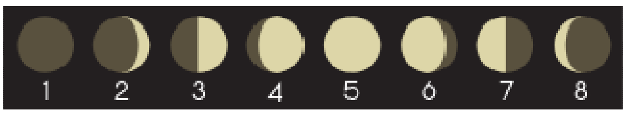
La probabilità cercata è quindi $P(A) = 4/7 = 0,\overline{571428}$ *, da cui* $1000 \times P(A) = 571,428\ldots$.

Risposta $\boxed{0571}$

Problema 10 – Notte di luna **70 punti**

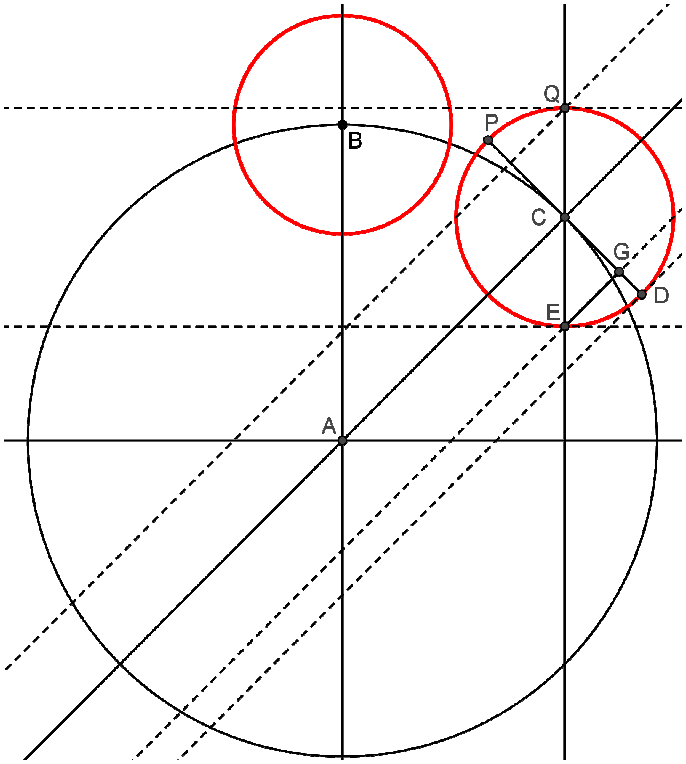
Due innamorati ammirano il cielo sereno mentre la luna è crescente (fase due, come da figura). Supponendo che i raggi solari (diretti o riflessi come quelli percepiti dagli spettatori suddetti) procedano parallelamente, qual è il rapporto fra l'area del disco lunare (completo) e l'area della lunetta (è il caso di dirlo!) mistilinea illuminata che osservano i due?
Dare come risposta detto rapporto moltiplicato per 1000. Utilizzare approssimazioni numeriche fino alla quarta cifra decimale.

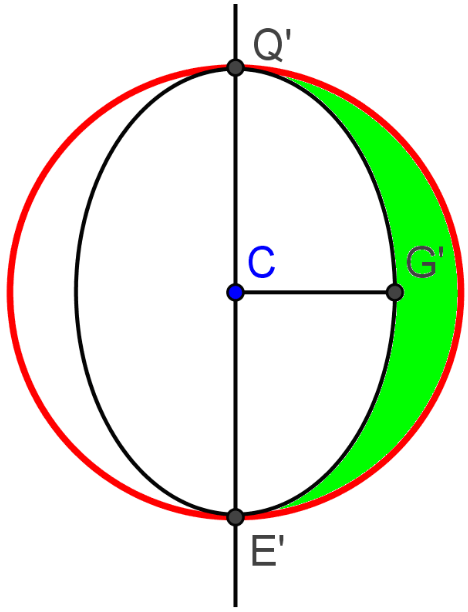




Soluzione 1:

Riferiamoci alle figure qui sotto.





La prima rappresenta le fasi lunari "crescente" (cerchio di centro C*) e "primo quarto" (cerchio di centro* B*). La seconda evidenzia la parte illuminata (ma nel disegno ombreggiata…!) vista dagli osservatori.*

Le rette tratteggiate indicano la direzione dei raggi solari (orizzontali) e dei riflessi dalla luna sulla terra (obliqui), cioè come li percepiscono i due innamorati.

L'angolo $B\hat{A}C$ *è di 45° come pure* $C\hat{E}G$. *Il triangolo* CEG *è rettangolo isoscele: vedi prima figura.*

L'ellisse di semiasse maggiore CQ' *e semiasse minore* CG' *descrive la parte interna del bordo della lunetta richiesta: vedi seconda figura.*

Per trovare l'area della lunetta richiesta basta calcolare l'area del cerchio di centro C *e quella dell'ellisse di cui sopra. Infatti L'area della suddetta lunetta è uguale alla semidifferenza fra le aree citate. Supponendo unitario il raggio del cerchio, visto che dobbiamo calcolare il valore di una proporzione, abbiamo quindi: Area cerchio =* π.

Supponendo l'ellisse riferita ad assi cartesiani di origine C*, semiasse (maggiore) verticale* CQ' *(*CQ' = CQ*) di misura* 1 *e semiasse minore* CG' *(*CG' = CG*) di misura* $\frac{1}{\sqrt{2}}$*,come facilmente si ricava, considerandone l'equazione canonica* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$*, otteniamo* $2x^2+y^2=1$. *La sua area è* $ab\pi$*, cioè* $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Il rapporto richiesto è quindi $\dfrac{\pi}{\frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\cong 6{,}828$. **Risposta** $\boxed{6828}$

Soluzione 2:

Gli osservatori vedono una sfera di raggio unitario (come supponiamo) tagliata da un piano inclinato di 45°. Immaginiamo la sfera centrata nell'origine degli assi in un sistema cartesiano tridimensionale e gli osservatori posti lungo l'asse x. L' equazione della sfera è $x^2 + y^2 + z^2 = 1$*, quella del piano suddetto è x = y. Intersecandoli si trova l'equazione* $2y^2 + z^2 = 1$ *che sul piano yz rappresenta proprio una ellisse di cui una parte descrive appunto un bordo della falce di luna richiesta dal problema.*
Il resto è come da soluzione 1.

Problema 11 – Sincronismo imperfetto 85 punti

Due fabbri, Antonio e Berardo, cominciano nel medesimo istante a percuotere uno stesso pezzo di ferro sull'incudine. Antonio batte esattamente 12 colpi in 7 minuti e Berardo 17 colpi in 9 minuti. Il lavoro va avanti per mezz'ora. Durante questo lasso di tempo non capiterà mai che i due fabbri battano in perfetto sincronismo, tuttavia quando i due colpi si avvicineranno maggiormente alla coincidenza? Rispondere indicando la somma del numero di colpi battuti da Antonio e di quelli battuti da Berardo più vicini al sincronismo.

Soluzione 1:

Antonio colpisce l'oggetto ogni $\frac{7}{12}$ *di minuto, quindi gli istanti (in minuti) in cui colpisce sono esprimibili come* $t_A = \frac{7}{12}n$*, dove n è un numero naturale che esprime la quantità di colpi battuti. Analogamente per Berardo avremo* $t_B = \frac{9}{17}m$*, dove m rappresenta il numero di colpi battuti dal fabbro suddetto. Il sincronismo si ha quando* $t_A = t_B$*, cioè* $\frac{7}{12}n = \frac{9}{17}m$*, da cui* $\frac{n}{m} = \frac{108}{119}$*. Il sincronismo perfetto si avrebbe al* 108° *colpo di Antonio e al* 119° *colpo di Berardo, ma ciò avverrebbe ogni* 63 *minuti. In mezz'ora (*30 *minuti) tuttavia i colpi battuti da Antonio saranno solo*
$\frac{30}{\frac{7}{12}} = \frac{30 \cdot 12}{7} \cong 51{,}4$*, quindi* 51 *colpi.*

Analogamente i colpi battuti da Berardo saranno $\frac{30}{\frac{9}{17}} = \frac{30 \cdot 17}{9} \cong 56{,}7$*, quindi* 56 *colpi.*

Esprimiamo la frazione $\frac{108}{119}$ *come* $\frac{108}{119} = \frac{1}{\frac{119}{108}} = \frac{1}{1+\frac{11}{108}} = \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{108}{11}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{9+\frac{9}{11}}}$.

Trascurando $\frac{11}{108}$ *si ha* $\frac{1}{1}$*, che è una prima approssimazione della frazione.*

Trascurando $\frac{9}{11}$ *si ha il valore* $\frac{9}{10}$, *che è una migliore approssimazione della frazione. Proseguendo in questo modo sviluppiamo in frazioni continue ottenendo:*

$\frac{108}{119} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2}}}}}$, *da cui la successione di frazioni:* $1, \frac{9}{10}, \frac{10}{11}, \frac{49}{54}, \frac{108}{119}$.

Dai risultati sulle frazioni continue segue non solo che le frazioni $\frac{n}{m}$ *ottenute sono approssimazioni sempre migliori di* $\frac{108}{119}$ *(il che non sarebbe sufficiente per il nostro problema), ma anche che ciascuna fornisce il minimo valore dello scarto* $\left|\frac{7}{12}n - \frac{9}{17}m\right|$ *ottenibile con un denominatore pari al massimo a m.*
Siccome n = 49 *e m* = 54 *è compatibile con le condizioni poste e fornisce uno scarto* $\left|\frac{7}{12}n - \frac{9}{17}m\right| = \frac{1}{12 \cdot 17} = \frac{1}{204}$ *che non può essere migliorato prima del sincronismo perfetto, abbiamo la risposta:* 49 + 54 = 103.

Soluzione 2:

Ragionando come nella prima parte della soluzione precedente, dobbiamo trovare una coppia di numeri interi $0 < n \leq 51$ *e* $0 < m \leq 56$ *tali che* $\left|\frac{7}{12}n - \frac{9}{17}m\right| = \frac{|119n - 108m|}{204}$ *sia minimo. Poiché* MCD(119,108) = 1 *il numeratore della frazione non potrà essere uguale a* 0 *con i vincoli imposti. Proviamo a vedere se il numeratore può essere uguale a* 1 *e risolviamo le due classiche equazioni diofantee*

$$119n - 108m = 1 \quad (*) \qquad\qquad 119n - 108m = -1 \quad (**)$$

Come è noto, se n_0, m_0 *è una soluzione particolare di una delle due, allora la soluzione generale si ottiene aggiungendo alla soluzione particolare una soluzione dell'equazione omogenea associata, dunque* $n = n_0 + 108A$, $m = m_0 + 119A$ *con A intero.*
Per trovare una soluzione particolare si può usare l'algoritmo euclideo, oppure considerare le equazioni modulo 108. *In ogni caso si ottiene* $n = -49 + 108A$, $m = -54 + 119A$ *per* (*) *e* $n = 49 + 108A$, $m = 54 + 119A$ *per* (**). *L'unica soluzione compatibile con i vincoli imposti è la soluzione che si ottiene dalla* (**) *con A* = 0, *ossia n* = 49 , *m* = 54 *come nella soluzione precedente.*

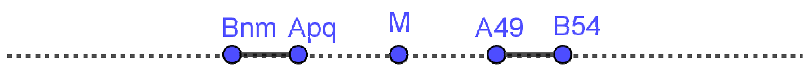
Soluzione 3:

Il problema presenta una simmetria. L'ultimo colpo (primo sincronismo tra i colpi) può interpretarsi come il primo (colpo "zero"): vedi fig.1 sotto.

Fig.1

Quindi il 54° colpo di A è equidistante (temporalmente) dal 59° e dal 60° colpo di B. Per i limiti imposti dobbiamo andare a ritroso (o avanti per simmetria): calcolare le differenze fra A e B a partire da 51 e 56 rispettivamente.
Per velocizzare il procedimento, analogamente a quanto fatto in "soluzione1", consideriamo la frazione $\frac{119}{108}$. *Si ha* $\frac{119}{108}=1+\frac{11}{108}$.
Essa vale 1 più una quantità appena maggiore di $\frac{1}{10}$. *Dovendo adoperare una frazione che sia appena maggiore di* $\frac{1}{10}$, *utilizzando al massimo due cifre al denominatore, si hanno i casi:*
$\frac{2}{19}$, $\frac{3}{29}$, $\frac{4}{39}$ *e* $\frac{5}{49}$ *ammissibili dal problema. L'ultima frazione è la più vicina, quindi otteniamo* $1+\frac{5}{49}=\frac{54}{49}$.
Si nota quindi un avvicinamento fra i colpi tra 49° di A e 54° di B.
La differenza fra A49 e B54, che è uguale (in valore assoluto) a quella fra A59 e B65 e che vale 1/204, è pure uguale al M.C.D. di 7/12 e 9/17 (nel senso che 1/204 è il massimo numero razionale che moltiplicato per un intero produce, in un caso, 7/12 e, in un altro, 9/17) quindi minima.
Proviamo ora che la soluzione ottimale trovata è unica (nell'intervallo considerato).
Osserviamo dapprima che la simmetria di cui si parlava all'inizio è pure unica: ogni situazione non si ripete, con la stessa modalità, due volte nell'intervallo considerato. Infatti se ciò accadesse ci si inoltrerebbe in un circolo vizioso e non si arriverebbe al m.c.m. (ultimo colpo di A e B).
Nella nostra fattispecie il "minimo" si è trovato nel caso in cui B54 > A49.
Controlliamo che non vi sia un altro caso, che indichiamo con Bnm < Apq, il quale dia lo stesso minimo.
Se esistesse si verrebbe a creare una situazione simmetrica rispetto al punto medio M di B54 e Bnm (o, ciò che è lo stesso, di A49 e Apq) che fotograferebbe (in modo "rovesciato": scambio di A con B) la situazione di metà percorso (vedi fig. 2 sotto): impossibile per quanto affermato prima.

Fig. 2



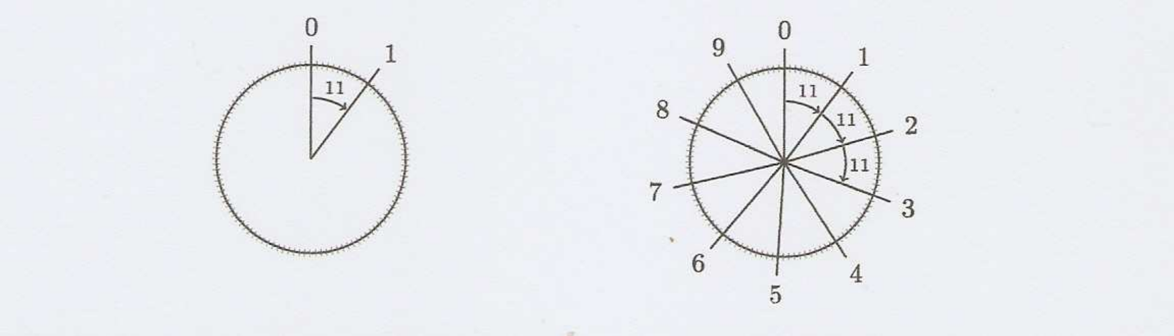
In conclusione la soluzione trovata è unica, c.v.d.

Soluzione 4:

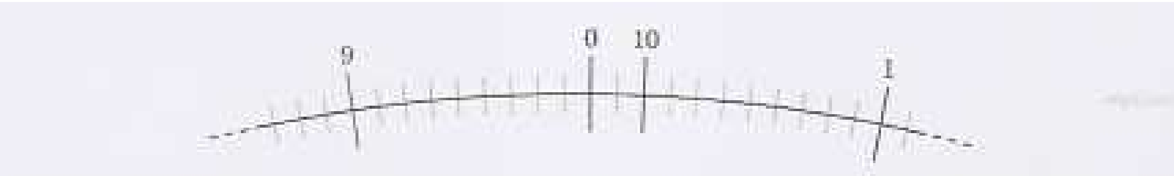
Per visualizzare meglio gli sfasamenti tra i colpi dei due fabbri immaginiamo di avere un orologio con una sola lancetta, la quale compie un giro completo ogni $\frac{9}{17}$ *di minuto, ritornando cioè sullo zero ad ogni colpo di Berardo.*
Per scoprire quanti giri percorre la lancetta tra due successivi colpi di Antonio impostiamo la proporzione

$$x \text{ giri : } \frac{7}{12}\text{ minuti} = 1 \text{ giro : } \frac{9}{17}\text{ minuti.}$$

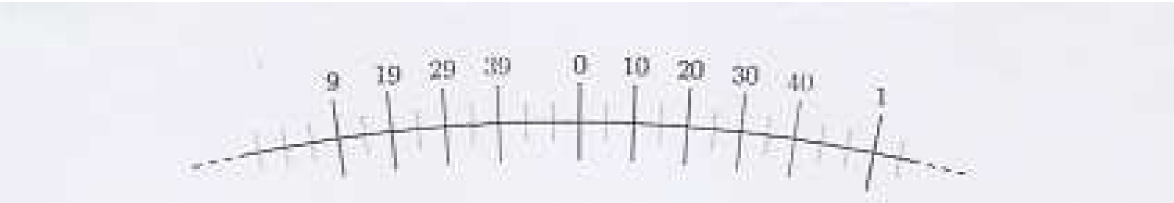
Risolvendo troviamo $x = \dfrac{7/12}{9/17} = \dfrac{7}{12}\cdot\dfrac{17}{9} = \dfrac{119}{108}$ *(giri), ovvero un giro completo più* $\dfrac{11}{108}$ *di giro.*
Dunque, se immaginiamo di dividere il giro della lancetta in 108 *"secondi", i colpi di Antonio ritarderanno ogni volta di* 11 *"secondi".*



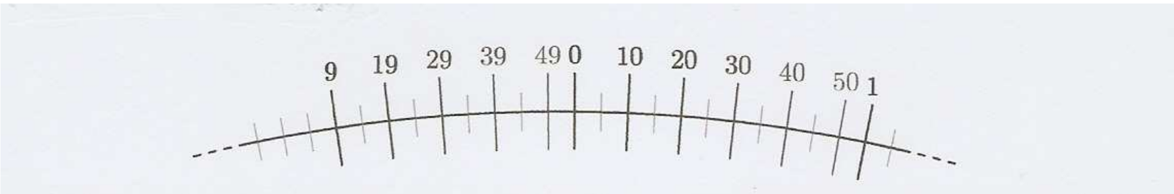
Perdendo 11 *"secondi" con ogni colpo, dopo* 10 *colpi, Antonio avrà accumulato un ritardo di* 110 *"secondi", ovvero di un giro intero più* 2 *"secondi".*



Procedendo di 10 *colpi in* 10 *colpi Antonio continua ad aumentare il proprio ritardo di* 2 *"secondi" (e un giro).*



Dopo 50 *colpi Antonio ritarda di* 10 *"secondi" (e cinque giri). Al colpo precedente (il* 49*.esimo), dunque, era in anticipo di* 1 *"secondo" rispetto a Berardo (che, con un vantaggio di* 5 *giri, stava per battere il* 54*.esimo colpo).*



Siccome in mezz'ora Antonio riesce a battere $\dfrac{12}{7}\cdot 30 \cong 51{,}4$ *colpi, l'unico colpo non ancora considerato è il* 51*. esimo, con un ritardo di* 21 *"secondi". Dunque i due fabbri sono arrivati più vicini alla sincronia tra il* 49*.esimo colpo di Antonio e il* 54*. esimo colpo di Berardo.*

Risposta $\boxed{0103}$