8 Gallery – Venerdì 2 marzo 2018

Gara per il pubblico – GARA B

Problema 1 – Quadri e cornici 20 punti

Con questa cornice - dice il negoziante - il quadro costa € 95.75 e con quest'altra, più bella e che costa il doppio, il prezzo è di € 115. Quanto costa il quadro senza cornice? Dare come risposta il valore del quadro in centesimi di euro.

Soluzione:

La differenza 115 – 95,75 = 19,25 *(in euro) rappresenta il valore della cornice meno cara. Il costo del quadro senza cornice è quindi* € 76,50.

Risposta 7650

Problema 2 – Il tarlo 20 punti

In uno scaffale in soffitta Carlo ritrova i suoi vecchi volumi della "Divina Commedia" che aveva usato a scuola. I volumi sono disposti in ordine uno accanto all'altro: Inferno per primo, Purgatorio in mezzo e infine Paradiso. Ciascun volume è costituito da 300 pagine più le copertine. Purtroppo i libri si trovano in cattivo stato e addirittura un tarlo ha scavato una galleria partendo dalla pagina 1 del primo volume, l'Inferno, sino all'ultima pagina del terzo volume, il Paradiso. Quanti fogli (pagine e copertine assimilati) sono stati forati dal tarlo?

Soluzione:

Osservando un libro di "costa", la prima pagina si trova sulla destra e l'ultima sulla sinistra. Il tarlo ha quindi bucato 302 *pagine più* 4 *copertine.*

Risposta 0306

Problema 3 – Rompicapo della settimana **30 punti**

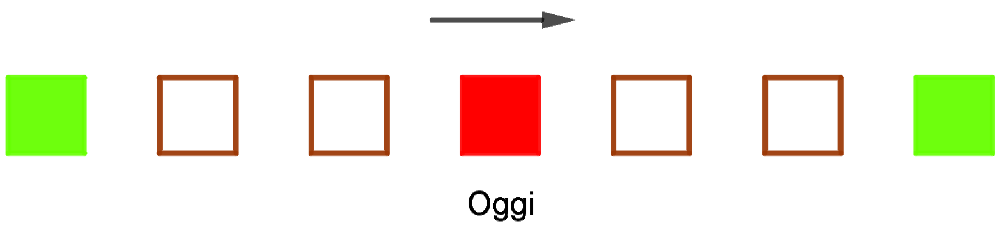
Quando il giorno dopodomani sarà ieri, allora "oggi" disterà dalla domenica quanto il giorno che era "oggi" quando il giorno prima di ieri era domani. In che giorno viene pronunciata questa frase? Nella risposta indicare 1 per il lunedì, 2 per il martedì, …, 7 per la domenica.

Soluzione 1:

In tutto quanto segue ragioneremo modulo 7. Se oggi è x, dopodomani sarà $x+2$ e il giorno in cui dopodomani sarà ieri è $x+3$. Esso disterà dalla domenica $\pm[7-(x+3)] = \pm(4-x)$. Il giorno in cui il giorno prima di ieri era domani corrisponde a $x-3$. Esso dista dalla domenica $\pm[7-(x-3)] = \pm(3-x)$. Dovremo pertanto avere $4-x = 3-x$ (che è impossibile) oppure $4-x = -(3-x) = x-3$ da cui $2x = 7$ che implica (sempre modulo 7) $x = 7$. La frase viene pronunciata di domenica.

Soluzione 2:

Riferiamoci alla figura seguente



Sia "Oggi" il giorno indicato col quadretto rosso (centrale) nella suddetta figura. Il primo e l'ultimo quadretto (in verdino) rappresentano gli altri giorni individuati leggendo il testo del quesito.
Questi ultimi sono equidistanti da "Oggi": ciò rappresenta già una possibilità che "Oggi" sia domenica. Due giorni della settimana, che distano fra loro 6 posizioni, sono pure conseguenti nella cronologia, insomma distano pure di 1. Quest'ultimo fatto indica che essi sono, nell'ordine della figura, giovedì e mercoledì: "Oggi" è domenica.

Risposta $\boxed{0007}$

Problema 4 – In allenamento **30 punti**

Un ciclista si sta allenando in pista. Inizia con una fase di riscaldamento per 10 minuti a 20 *km/h*, poi pedala per 45 minuti alla velocità media di 40 *km/h* e infine con le ultime energie pedala per 5 minuti a 50 *km/h*. Se la pista è lunga 450 *m*, quanti giri di pista ha percorso in totale?

Soluzione:

Fase 1: spazio percorso = $10\times20/60 = 3{,}333$ *km*

Fase 2: spazio percorso = $45\times40/60 = 30$ *km*

Fase 1: spazio percorso = $5\times50/60 = 4{,}1666$ *km*

Spazio totale = $37{,}5$ *km* = $37500m$

Numero di giri = $37500m/450m = 83{,}333\ldots$ **Risposta** $\boxed{0083}$

Problema 5 – Una gara particolare 35 punti

Un atleta quando corre i 400 *m* (cioè un giro completo di pista) impiega 3,50 secondi per i primi 40 metri, poi prosegue a velocità costante passando ai 300 metri in 36 secondi netti, poi conclude correndo l'ultimo tratto con una velocità del 10% più bassa rispetto al tratto immediatamente precedente. La pista che utilizza per gli allenamenti è affiancata da una ferrovia rettilinea percorsa da lunghi convogli merci. Supponiamo che al momento dello start del velocista la testa di un convoglio, lungo complessivamente 300 metri, gli sfili lentamente a fianco mantenendo una velocità costante di 20 *km/h*. Con quanti secondi d'anticipo l'atleta completerà il suo giro di pista rispetto al passaggio a fianco della linea di partenza della coda del treno? Arrotondare il numero di secondi all'intero più vicino.

Soluzione :

Si calcoli innanzitutto la velocità v_1 *mantenuta dall'atleta fra i* 40 *e i* 300 *metri:*

$$3{,}50 + \frac{300-40}{v_1} = 36{,}00$$

da cui $v_1 = 8{,}00$ *m/s.*
Pertanto la velocità v_2 *con cui egli correrà gli ultimi* 100 *metri di pista sarà pari al* 90% *di* v_1*, cioè* 7,20 *m/s. Infine il tempo complessivo impiegato dall'atleta per percorrere i* 400 *metri sarà:*

$$t_A = 36{,}00 + \frac{100}{7{,}20} \cong 49{,}89\ s\,.$$

La coda del convoglio ferroviario passerà invece a fianco della linea di partenza della pista d'atletica esattamente dopo un intervallo di tempo necessario alla testa del convoglio stesso per percorrere (con velocità costante di 20 *km/h, cioè* 20/3,6 *m/s) una distanza pari alla lunghezza del treno, cioè* 300 *metri. Pertanto la coda del treno sfilerà a fianco della linea di partenza dopo*

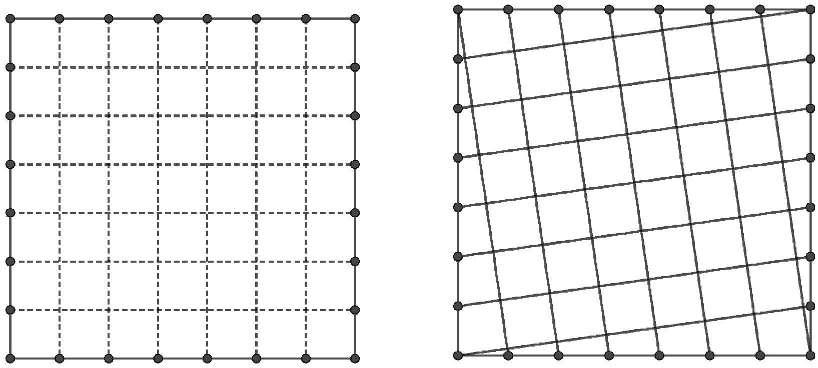
$$t_T = \frac{300}{20/3{,}6} = 54{,}00\ s\,.$$

L'atleta arriverà quindi al traguardo con un vantaggio di poco superiore ai 4 *secondi rispetto al passaggio dell'ultimo vagone.*

Risposta $\boxed{0004}$

Problema 6 – Quadratini inclinati 40 punti

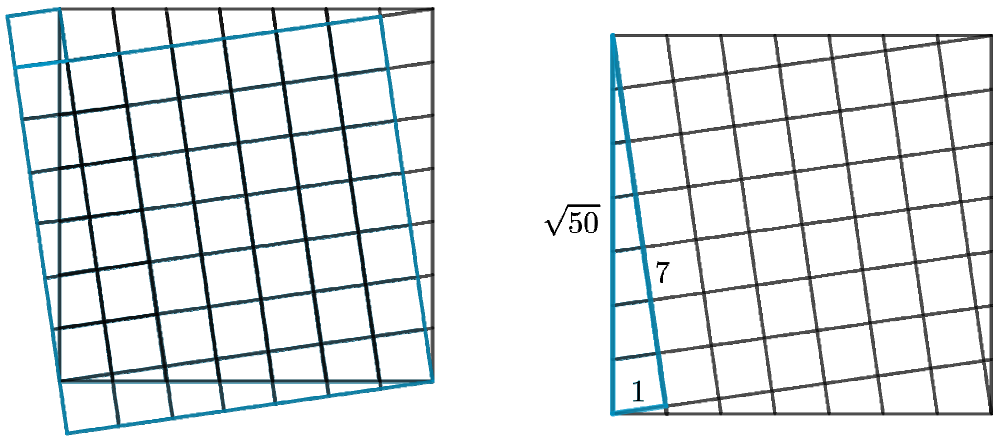
Riccardo vuole dividere il proprio foglio quadrato in 49 quadratini identici. Divide ciascun lato in 7 parti uguali, indicando gli estremi con dei puntini, quindi inizia a tagliare il foglio lungo linee parallele e perpendicolari che passano per questi puntini. Malauguratamente Riccardo sfalsa le linee, come illustrato in figura, ottenendo meno quadratini del previsto.



Scartando i ritagli che non sono quadratini, che porzione del foglio occupano i quadratini?
Esprimere le prime quattro cifre dopo la virgola del numero trovato.

Soluzione:

Come risulta dalla figura, Riccardo ha ottenuto 36 *quadratini. Inoltre, traslando a sinistra i ritagli del lato destro e in basso i ritagli del lato alto, si ottengono esattamente* 50 *quadratini. (In alternativa: prendendo come sistema di riferimento i quadratini ottenuti, il quadrato iniziale è costruito sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cateti* 7 *e* 1*, dunque ha un'area di* $7^2 + 1^2 = 50$ *quadratini).*



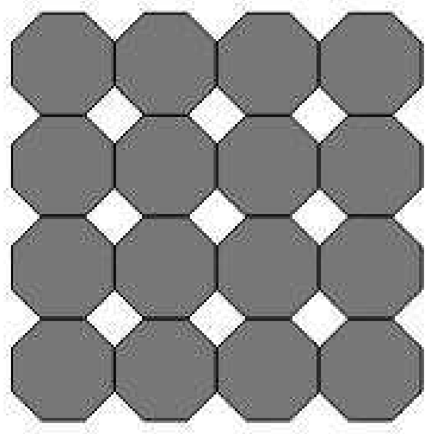
La superficie del foglio, quindi, equivale a quella dei quadratini. Riccardo ne ha utilizzati 36*, ovvero una porzione di foglio pari a* $\frac{36}{50} = 0{,}7200$

Risposta $\boxed{7200}$

Problema 7 – Tiro al bersaglio 45 punti

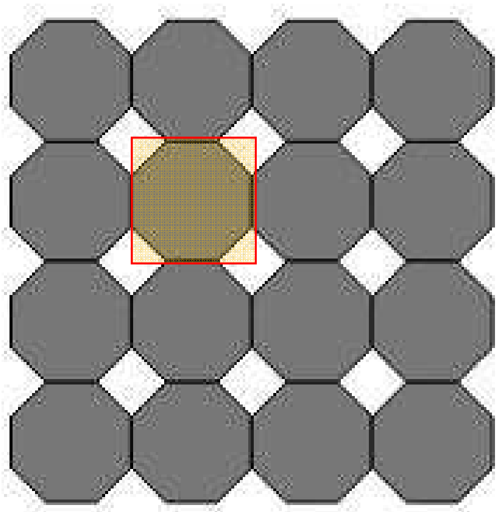
Luigi è stato catturato da un gruppo di fanatici Pitagorici, che hanno deciso che lo libereranno solo se riuscirà a colpire, da bendato, uno dei bersagli bianchi nella parete rappresentata in figura. La parete è infinita ma gli obiettivi bianchi si ripetono in modo regolare. Dal momento che la prova è particolarmente difficile e che Luigi è costretto a sparare in modo completamente casuale, gli vengono concessi due colpi. Se dopo il primo colpo avrà fallito, ne avrà un secondo a disposizione.

Se anche il secondo colpo andrà a vuoto, rimarrà prigioniero per l'eternità. Qual è la probabilità che il povero Luigi si salvi? Indicare nel risultato la parte intera della probabilità percentuale.



Soluzione:

Bisogna individuare nella figura un modulo che si ripeta in modo regolare, come quello indicato in figura.

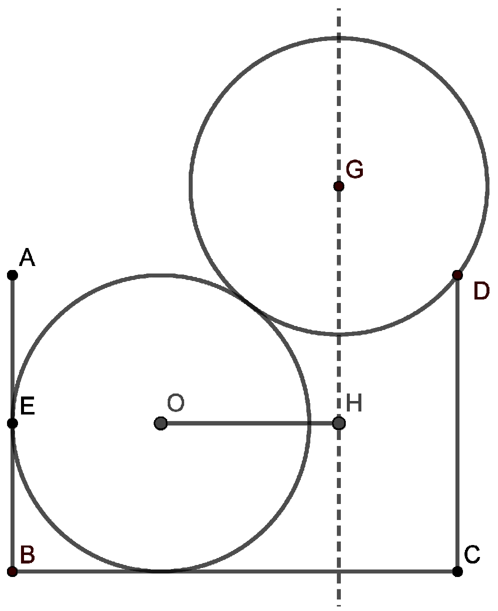


Si tratta di un quadrato al cui interno sono presenti un ottagono regolare (bersaglio sfavorevole) e quattro quarti del quadrato bianco che nel complesso individuano un intero quadrato bianco (bersaglio favorevole). Indicando con a il lato comune dell'ottagono e del quadrato bianco, si ottiene facilmente che l'area favorevole all'evento (area del quadrato bianco) vale a^2.
L'area totale possibile come esito del colpo è invece l'area del quadrato del modulo indicato, che ha lato pari al lato dell'ottagono a sommato alla lunghezza della diagonale del quadrato bianco, la quale vale $a\sqrt{2}$. *L'area possibile sarà dunque* $\left(a+a\sqrt{2}\right)^2 = a^2\left(1+\sqrt{2}\right)^2$.
La probabilità di fare centro con un singolo colpo è uguale al rapporto tra le due aree, quindi
$$\frac{a^2}{a^2\left(1+\sqrt{2}\right)^2} = \frac{1}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2} \cong 0{,}1716.$$
Per salvarsi possono avvenire i seguenti due eventi. Il primo: Luigi centra al primo colpo; il secondo: Luigi sbaglia il primo colpo ma va a segno con il secondo. Bisogna quindi sommare le probabilità dei due eventi (incompatibili), di cui il secondo è composto (errore al primo colpo e centro al secondo). Si ottiene: $P = 0{,}1716 + (1-0{,}1716)\cdot 0{,}1716 \cong 0{,}31$ *cioè* 31%.

Risposta **0031**

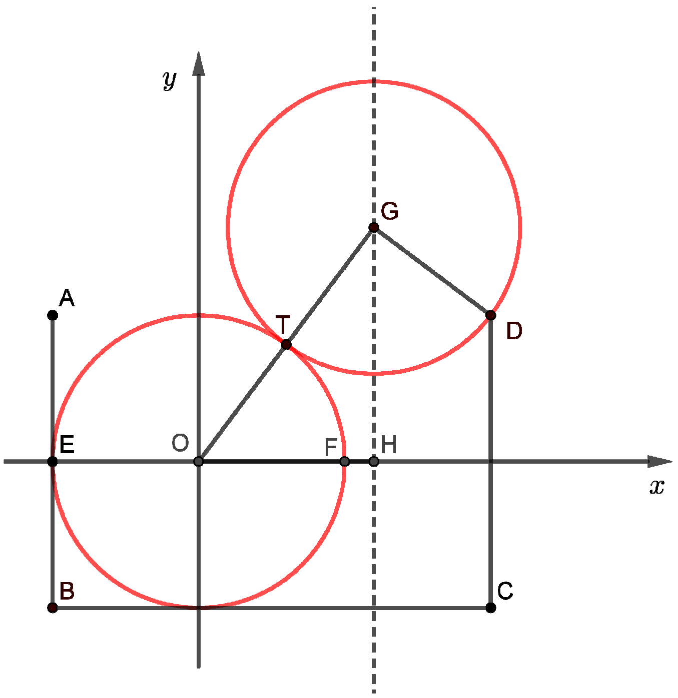
Problema 8 – Palline nel bicchiere **60 punti**

Pierino ha due biglie di vetro sferiche di raggio 1 ed un bicchiere cilindrico di altezza (interna) 2, il cui diametro interno misura 3. Il ragazzo pone le palline nel bicchiere in modo che una appoggi sul fondo e su una parete interna del bicchiere stesso. L'altra sferetta tocca la prima biglia ed il bordo del recipiente, come in figura (proiezione laterale). Si vuole conoscere la lunghezza del segmento GH, distanza del centro della seconda biglia dal punto H che giace sul segmento OH parallelo al fondo del bicchiere e perpendicolare a GH stesso. Dare come risposta il valore $1000 \times \overline{\mathrm{GH}}$.



Soluzione 1 (analitica):

Immaginiamo un sistema di assi cartesiani ortonormali di centro O*, asse x che passa per* O *e* H*, asse y come in figura sotto.*



Abbiamo: $x^2 + y^2 = 1$, *equazione della circonferenza (descritta dalla prima pallina) di centro* O *e raggio* $\mathrm{OE} = \mathrm{OF} = \mathrm{OT}$, *dove* T *è il punto di tangenza delle due circonferenze. Dobbiamo cercare l'equazione della circonferenza di centro* G *(descritta dalla seconda pallina). Ponendo* G(a,b) *troviamo* $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - 1 = 0$. *Poiché quest'ultima circonferenza passa per* D(2,1), *otteniamo* $a^2 + b^2 - 4a - 2b + 4 = 0$. *Essendo poi* $\overline{\mathrm{GO}} = 2$, *si ricava* $a^2 + b^2 = 4$.

Risolvendo quindi il sistema $\begin{cases} a^2 + b^2 - 4a - 2b + 4 = 0 \\ a^2 + b^2 = 4 \end{cases}$ *si ha, via via,*

$$\begin{cases} 2a + b - 4 = 0 \\ a^2 + b^2 = 4 \end{cases}, \quad \begin{cases} b = 4 - 2a \\ 5a^2 - 16a + 12 = 0, \text{ da cui } a = \dfrac{8 \mp \sqrt{64-60}}{5} = \dfrac{8 \mp 2}{5} \end{cases}.$$

Otteniamo le due soluzioni: $a_1 = \frac{6}{5}$, *da cui* $b_1 = \frac{8}{5}$ *e* $a_2 = 2$ *da cui* $b_2 = 0$

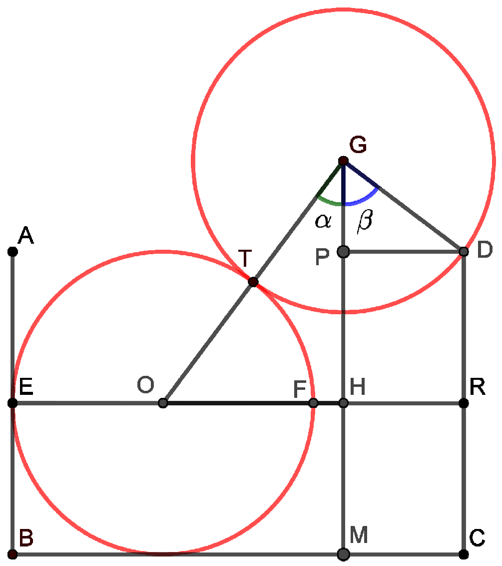
La prima soluzione individua la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - \frac{12}{5}x - \frac{16}{5}y + 3 = 0$ *in cui* $b = \frac{8}{5}$ *è l'ordinata di* G, *cioè* $\overline{\mathrm{GH}} = \frac{8}{5} = 1{,}6$.

Si può osservare che, in questo caso, l'angolo $\mathrm{O\hat{G}D}$ *è retto.*

La seconda soluzione individua la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$, *circonferenza con centro sull'asse x e passante per* C *e* D, *che descrive quindi una pallina che attraversa il bicchiere: non accettabile.* **Risposta** $\boxed{1600}$

Soluzione 2 (trigonometrica):

Riferiamoci alla figura qui sotto e poniamo $\mathrm{O\hat{G}H} = \alpha$ *e* $\mathrm{H\hat{G}D} = \beta$. *In figura* P *è la proiezione ortogonale di* D *su* GH.



Considerando il triangolo rettangolo OHG, *abbiamo* $2\cos\alpha = \cos\beta + 1$.
Sappiamo pure che risulta $\overline{\mathrm{OH}} + \overline{\mathrm{HR}} = \overline{\mathrm{OH}} + \overline{\mathrm{PD}} = 2$, *cioè* $2\sin\alpha + \sin\beta = 2$.

Risolvendo (con passaggi non semplicissimi) il sistema $\begin{cases} \cos\beta + 1 = 2\cos\alpha \\ 2\sin\alpha + \sin\beta = 2 \end{cases}$, *otteniamo*

$5\cos^2\alpha - 4\cos\alpha = 0$, *da cui le due soluzioni* $\cos\alpha_1 = 0$ *e* $\cos\alpha_2 = \frac{4}{5}$.
Dalla prima si ha $\overline{\mathrm{GH}} = 2\cos\alpha_1 = 0$, *da cui* G ≡ R, *caso da escludere come in "soluzione 1", secondo caso.*
Dalla seconda soluzione si ha $\overline{\mathrm{GH}} = 2\cos\alpha_2 = \frac{8}{5}$ *come in " soluzione1", primo caso.*

Problema 9 – Il resto 70 punti

Per acquistare un biglietto che costa 5 € ci sono in coda ad uno sportello 30 clienti provvisti di una banconota da 10 € e 70 clienti provvisti di una banconota da 5 €. Qual è la probabilità che il cassiere si trovi impossibilitato a dare il resto a tutti i clienti se all'apertura dello sportello la cassa è sprovvista di banconote da 5 €? Fornire come risposta le prime 4 cifre dopo la virgola della probabilità richiesta.

Soluzione:

Consideriamo il piano cartesiano e rappresentiamo la coda con una spezzata $P_0P_1P_2\ldots P_{100}$ *che parte dall'origine. Per ogni cliente con una banconota da 5 € disegniamo un trattino ascendente e per ogni cliente che possiede una banconota da 10 € disegniamo un trattino discendente. In tal modo la spezzata unirà i punti* $P_i(i\ ;\ y_i)$ *per* $i = 0,1,\ldots,100$ *in cui* $P_0 = (0\ ;\ 0)$ *e* $P_{i+1} = (i+1\ ;\ y_i+1)$ *se il cliente* (i+1)*.esimo ha la banconota da* 5 €, $P_{i+1} = (i+1; y_i-1)$ *se il cliente* (i+1)*.esimo ha la banconota da* 10 €*. Si noti che la linea è composta da trattini obliqui (a* ± 45° *rispetto al'asse x) di lunghezza* $\sqrt{2}$
Otteniamo così una spezzata che va dall'origine al punto P_{100} = A(100 ; 70 −30) = A(100 ; 40). *Le possibili spezzate sono* $\binom{100}{70} = \binom{100}{30}$ *in quanto vi sono* 70 *salite e* 30 *discese. Il cassiere risulta impossibilitato a dare il resto quando la spezzata incontra la retta* $y = -1$*. Le spezzate che incontrano la retta* $y = -1$ *sono in corrispondenza biunivoca con le spezzate che vanno dall'origine al punto* B(100 ; − 42) *simmetrico di* A *rispetto alla retta* $y = -1$*. Una siffatta spezzata avrà* 29 *salite e* 71 *discese (infatti* 29 + 71 = 100 e 29 − 71 = − 42*), quindi le possibilità sono:* $\binom{100}{29} = \binom{100}{71}$*. La probabilità richiesta vale pertanto* $\binom{100}{29} / \binom{100}{30} = \frac{30}{71} = 0{,}4225352\ldots$

Risposta $\boxed{4225}$

Problema 10 – Grandi potenze 75 punti

Dato A = $2017^{2019} + 2019^{2017}$, sia 2018^k la massima potenza di 2018 che divide A. Qual è il resto della divisione ($A/2018^k$): 2018?

Soluzione:

Utilizzando la formula del binomio di Newton, abbiamo:

$$A = (-1+2018)^{2019} + (1+2018)^{2017} = \left[-1+2019\times 2018-\binom{2019}{2}2018^2+2018^3 B\right]+$$

$$+\left[1+2017\times 2018+\binom{2017}{2}2018^2+2018^3 C\right]=$$

$$= 2\times 2018^2 - 4035\times 2018^2 + 2018^3(C+B) = -4033\times 2018^2 + 2018^3 D$$

per opportuni interi B, C *e* D = C + B.

Risulta quindi $k = 2$ *e* $A/2018^2 = -4033 + 2018\,D \equiv 3 \pmod{2018}$. **Risposta** $\boxed{0003}$