



Progetto Olimpiadi della Matematica



Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Si ricorda anche che occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo degli zeri iniziali.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale x è il più grande intero minore od uguale ad x .
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:
 $\sqrt{2} \approx 1,4142$ $\sqrt{3} \approx 1,7321$ $\sqrt{5} \approx 2,2361$ $\pi \approx 3,1416$.

LIVE
FROM NEW YORK
IT'S SATURDAY NIGHT!

1. *La famiglia Conehead*

Connie Sono andata a far la spesa. Alla cassa del supermercato, mi hanno consegnato uno scontrino rettangolare: ho misurato i lati. Sono lunghi 8 cm e 54 cm. L'ho messo in tasca, ma ha fatto tante pieghe.

Papà Beldar Qual è l'area dello scontrino piegato?

Connie Non lo so!

Papà Beldar Usa questo chiodo e buca tutti gli strati dello scontrino piegato. Quante volte hai bucato la carta?

Connie Sette.

Papà Beldar Quanto misura in mm^2 al minimo l'area dello scontrino piegato?

2. *I Fratelli Festrunks*

Yortuk Il conto delle pizze è di 45,10\$.

Georg La mia pizza costava meno della sua.

Fox Ma non mi offrite nemmeno la pizza?!?

Yortuk Facciamo così: Fox paga 1\$ per ogni persona con una maglietta nera presente nel bar e 0,50\$ per ogni persona con una maglietta rossa; Georg paga 1,30\$ per ogni persona con una maglietta rossa e 0,50\$ per ogni persona con una maglietta nera; io pago 0,50\$ per ogni altra persona (cioè senza una maglietta né rossa né nera) presente nel bar.

Pagano e escono dal bar.

Fox Come facevi a sapere che avremmo pagato esattamente il conto?

Yortuk Perché c'erano 50 persone nel bar. (*Insieme con Georg*) Siamo due tipi spontanei e folli!

Voce fuori campo QUANTO HA PAGATO FOX IN CENTESIMI?

3. *In cucina con Julia*

Julia (*Parlando alla telecamera con tono molto deciso, ma gioviale*) Care amiche, vedete questo recipiente cilindrico bianco pieno di salsa—potreste pensare che sia sangue (*Intinge un mestolo dentro al recipiente e lo estrae tutto rosso*), ma è proprio salsa di pomodoro. L'ho preparata spremendo 43 pomodori che poi ho passato con molta cura come ho imparato a Parigi. Bisogna sempre fare molta attenzione alle dimensioni dei recipienti: questo bianco ha diametro di base di 20 cm e altezza di 24 cm. Quei recipienti cilindrici gialli che vedete là hanno diametro di base di 12 cm e altezza di 10 cm. Perciò—tanto per farla vedere a quegli insulsi maschi sciovinisti che pensano che le donne non siano in grado fare matematica—sappiamo quanti sono i recipienti che potremo riempire completamente perché poi dovremo chiuderli ermeticamente. (*La trasmissione televisiva si interrompe di colpo.*)

Voce fuori campo QUANTI RECIPIENTI GIALLI RIEMPIE JULIA?

4. *Samurai Farm*

Ogni giorno, esclusi i lunedì, Samurai Futaba passa davanti a un melo, sul quale cresce una nuova mela ogni notte. Samurai Futaba ha con sé piccoli contenitori da frutta diversi ogni giorno: al martedì contenitori da 2 mele ciascuno, al mercoledì da 3 mele, al giovedì da 4, al venerdì da 5, al sabato da 6 e alla domenica da 7. Samurai Futaba raccoglie le mele dall'albero esattamente quando esse sono tante da non lasciare spazi vuoti nei contenitori che ha con sé quel giorno (ad esempio se un martedì ci sono 5 mele sull'albero Samurai Futaba non ne raccoglie nessuna, se ce ne sono 6 le raccoglie tutte). Oggi sull'albero c'è una mela..

Voce fuori campo QUANTE MELE RACCOGLIERÀ SAMURAI FUTABA DA OGGI, VENERDÌ 3 MARZO 2017, AL 31 DICEMBRE DI QUEST'ANNO?

5. *Connie conta i minuti*

Connie Papà, guarda quell'orologio sul muro. Le lancette si muovono a scatti ogni minuto.

Papà Beldar Ora è mezzogiorno.

Connie Quanti minuti ci vorranno come minimo perché la lancetta delle ore e quella dei minuti formino un angolo di 24° ?

6. La gallina della famiglia Conehead

Papà Beldar è sulla porta di casa e guarda la sua gallina molto rara. La gallina produce uova solo alle 8 di mattina e non tutti i giorni. La probabilità che produca un uovo alle 8 di mattina vale $\frac{n}{n+1}$ dove n è il numero di giorni che sono passati dall'ultimo uovo prodotto. Si volta verso l'interno..

Papà Beldar Sono le 9 di venerdì; un'ora fa la gallina ha prodotto un uovo. Ora parto e tornerò esattamente alle 9 di mattina di venerdì prossimo. Ciao! (Tocca con la sua testa a cono quelle di Mamma Prymaat e di Connie.)

Voce fuori campo QUAL È LA PROBABILITÀ DI TROVARE AL SUO RITORNO ALMENO 5 NUOVE UOVA?

[Dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.]

7. Le cifre italiane

Papà Beldar Facciamo il gioco delle cifre italiane?

Connie SÌ!

Papà Beldar Ricorda: $l_d(n)$ indica il numero delle lettere nella parola italiana che è la cifra delle decine del numero n . Ad esempio $l_d(10) = 3$.

Connie Mentre $l_d(40) = 7$. In italiano ci sono 4 cifre che hanno tre lettere, 3 cifre che hanno quattro lettere, una con cinque lettere, una con sei e una con sette; vero, papà?

Papà Beldar Sì, brava! Considera ora la successione definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} a_1 = 10 \\ a_{n+1} = a_n + l_d(a_n) \end{cases}$$

Connie Adesso la scrivo tutta (si mette a scrivere molto in fretta su un foglio).

Passano dieci minuti. Mamma Prymaat entra.

Mamma Prymaat State facendo un gioco con le cifre italiane. Connie, che numero hai scritto ora?

Connie a_{2017} .

Voce fuori campo CHE NUMERO HA SCRITTO ORA CONNIE?

8. Il viaggio della famiglia Conehead

Esterno, su Long Island. La famiglia Conehead, come ogni primo giorno del mese, deve recarsi dalla nonna in macchina. Ogni volta il viaggio dura un'ora esatta perché il papà tiene sempre la stessa velocità, di poco sotto il limite. Questa volta hanno deciso di fare un gioco: partendo alle ore 10:00 esatte dell'orologio dell'auto, ciascuno scommetterà sull'ora che segnerà il medesimo orologio all'arrivo. Ma ognuno di loro ha una strategia.

Papà Beldar (Parla, rivolto alla telecamera, prima di salire in auto per mettersi alla guida) Ho scommesso su 10:30. Per vincere, guarderò il contachilometri per andare al doppio della velocità che tengo di solito.

Mamma Prymaat Ho scommesso su 11:10. Durante il viaggio li costringerò a fermarsi per 10 minuti esatti fingendo di stare male.

Connie Ho scommesso su 10:40 e, durante il viaggio, quando nessuno guarderà, sposterò indietro l'orologio di 20 minuti.

Frank Ho scommesso su 11:20. Per vincere modificherò il contachilometri dell'auto affinché segni sempre $\frac{1}{3}$ in più della velocità effettiva.

Voce fuori campo SAPENDO CHE ESATTAMENTE UNO DEI QUATTRO NON RIESCE A METTERE IN ATTO IL SUO PIANO E CHE UNA PERSONA HA VINTO, QUAL È LA DURATA EFFETTIVA DEL VIAGGIO IN MINUTI? (OGNI SOSTA È COMPRESA NEL TEMPO DI VIAGGIO.)

9. Telefonata in Canada

Il presidente biondo Steve, chiamiamo il Canada?

Steve PERCHÉ NO, PRESIDENTE?

Il presidente biondo (Al telefono) Pronto, Justin. È il presidente che parla. Forse tu sei troppo giovane per conoscere le equazioni di secondo grado? (Rumori indistinti nella cornetta) Bene: allora sai dirmi per quanti valori interi del parametro a l'equazione $x^2 + ax + 2017^{2017}$ ha due radici intere?

10. *L'Italia va in guerra*

Il presidente biondo Steve, chi chiamo ora?

Steve PROVIAMO CON UN ALLEATO FACILE, PRESIDENTE; CHIAMIAMO L'ITALIA.

Il presidente biondo (*Al telefono*) Pronto, Paolo! Quanti sono i numeri di sei cifre non divisibili per 7 e tali che la somma delle loro cifre sia 3? (*Silenzio*) Ma non sai nemmeno contare? Siete voi che continuate a fare quella stupida divisione tra le due culture? (*Il silenzio continua*) Sveglia!!! Il Colosseo non sta più in piedi, l'Italia va a pezzi, l'America è la migliore! Preparati alla guerra! (*Sbatte giù la cornetta.*)

11. *L'Australia va in guerra*

Il presidente biondo Steve, chiamiamo l'Australia? Dopo tutto, che cosa può andare storto?

Steve CERTO, PRESIDENTE.

Il presidente biondo (*Al telefono*) Pronto, Malcolm. È il presidente che parla. Quanti numeri naturali sono uguali alla somma tra la somma delle loro cifre e il prodotto delle loro cifre? (*Si sente un mormorio indistinto dalla cornetta*) Non lo sai?!? L'America è la migliore, l'Australia fa schifo! Preparati alla guerra! (*Sbatte giù la cornetta.*)

Steve QUANTI NUMERI SONO, PRESIDENTE?

Il presidente biondo Incluso lo zero?

Steve LO ZERO È IL PRIMO NUMERO NATURALE, PRESIDENTE!

12. *Ricorda con rabbia*

Cimitero, tombe con solo una stele di pietra a distinguere i cumuli.

John (*Capelli bianchi, si appoggia a un bastone*) Ci sono tutti, sono sepolti qui: Jane, Garrett, Gilda, Bill,... E Dan: ha voluto che la stele fosse un trapezio, chissà perché? Non sapeva neppure che cosa fosse. Il marmista poi si è scatenato: ha fissato i punti medi dei lati obliqui, disegnato il segmento che li congiunge, e ha ottenuto una croce disegnando anche l'altezza del trapezio tracciata da un vertice della base minore e una circonferenza a rappresentare il sole che tocca la croce nei quattro vertici. In più ha racchiuso un numero nella stele: il rapporto tra i due segmenti che formano la croce. Mi hanno detto che l'area del trapezio è 5600 dm^2 e il prodotto delle lunghezze dei due bracci orizzontali della croce è 100 dm^2 . Ma quanto vale il rapporto tra il segmento più lungo e quello più corto nella croce? Io sono l'unico ancora vivo a chiedermi questa domanda; perché? (*Si rasserena, getta il bastone, inizia a ballare.*) Perché sono un matematico.

13. *Samurai Solitario*

Samurai Futaba fa un solitario con le 10 carte di Picche, dall'asso al 10. Si vedono le altre 42 carte del mazzo tagliate a metà e sparse sul tavolo. Mescola accuratamente le 10 carte integre. Appoggia il mazzo coperto sul tavolo.

Samurai Futaba (*Solleva la carta in cima al mazzo coperto*) 8 (*La gira, è il 3, appoggia la carta scoperta sul tavolo. Solleva la carta che è ora in cima al mazzo coperto*) 9 (*La gira, è il 7, appoggia la carta scoperta sul tavolo. Solleva la carta in cima al mazzo coperto*) 10 (*La gira, è l'asso, appoggia la carta scoperta sul tavolo. Solleva la carta in cima al mazzo coperto*) 8 (*La gira, è il 10, appoggia la carta scoperta sul tavolo. Solleva la carta in cima al mazzo coperto*) 9 (*La gira, è il 9, appoggia la carta scoperta sul tavolo. Scuote la testa sconsolato, guardando la telecamera*) Hicotushi nopetiti hacasumai. (*Scorrono i sottotitoli: «Non riesco a completare questo solitario.»*) Maracatoni petele machì 8, 9 atuti 10 manupiro ducatò 8, 9, 10, 8, 9, 10, 8, 9, 10, 8 anacogiro minicotù. (*Altri sottotitoli: «Il solitario si completa se le carte 8, 9 o 10 non vengono girate nel momento in cui si dice lo stesso numero nella sequenza 8, 9, 10, 8, 9, 10, 8, 9, 10, 8.»*)

Voce fuori campo QUAL È LA PROBABILITÀ DI RIUSCITA DEL SOLITARIO?

[*Dare la risposta come somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini*]

14. *Il dilemma dei Fratelli Festrunks*

Yortuk Dobbiamo trasportare questi sette tubi, come facciamo?

Georg Sono tutti lunghi 3 m e hanno la stessa sezione circolare di diametro 50 cm. Siamo due tipi spontanei e folli: li fissiamo tutti insieme, uno al centro con gli altri sei attorno, e li blocchiamo con questi tre elastici.

Yortuk Hai ragione; così ciascuno dei sei tubi all'esterno è tangente al tubo centrale e ad altri due esterni. (*Guarda soddisfatto il blocco realizzato*) Quanti millimetri è lungo ogni elastico che avvolge il blocco?

15. *Il Messico va in guerra*

Il presidente biondo Che bello, Steve! Come mi diverto; mi è venuta un'idea per far pagare al Messico la costruzione del muro. Adesso lo chiamo.

Steve BENE, PRESIDENTE.

Il presidente biondo (*Al telefono*) Pronto, Enrique! Ti propongo una scommessa: tu mi dici quanti numeri naturali scrivere; io ne scrivo quanti hai detto, quelli che voglio. Vinci se almeno due tra i numeri che ho scritto sono tali che la loro somma o la loro differenza è divisibile per 10000. Chi perde paga la costruzione del muro.

Steve LA SCOMMESSA NON È EQUA, PRESIDENTE.

Il presidente biondo Lo so.

Steve VINCE LUI!

Voce fuori campo QUAL È IL PIÙ PICCOLO NUMERO CHE ENRIQUE DEVE DIRE PER VINCERE LA SCOMMESSA?

16. *Connie scrive una T*

Connie sta giocando con cinque figure di legno.

Papà Beldar I terrestri amano le figure piane semplici. Tutti gli angoli acuti di quelle cinque con cui stai giocando sono di 45° .

Connie Hai ragione, papà! Sono proprio semplici: due sono triangoli rettangoli isosceli, due trapezi rettangoli e un parallelogramma. Ho misurato le dimensioni essenziali: i cateti dei triangoli rettangoli misurano 5 cm che è la stessa lunghezza delle altezze dei quadrilateri. Ciascun trapezio ha basi lunghe 3 cm e 8 cm; il lato minore del parallelogramma misura 7 cm.

Papà Beldar Lo sai che la figura che hai costruito accostando le cinque figure è una lettera T terrestre?

Connie Vuoi dire che leggono "T" due rettangoli, uno perpendicolare all'altro con lati minori uguali?

Papà Beldar Sì! Quanto vale in mm il perimetro della "T" che hai costruito?

17. *Samurai Scarta*

Mr. Dantley Si gioca con un mazzo di 16 carte, divise in 2 semi, Cuori e Picche, con i numeri da 1 a 8 per ciascun seme. A turno, ciascuno di noi scarta una carta dalla propria mano sul tavolo: questa deve essere come numero consecutiva (precedente o successiva) all'ultima giocata (non importa il seme). (*Mr. Dantley distribuisce equamente le carte in modo casuale tra lui e Samurai Futaba*) Inizia chi tra noi ha in mano l'1 di Picche, giocandolo sul tavolo. Vince chi costringe l'avversario a non poter più giocare carte; invece, se entrambi i giocatori le finiscono, è dichiarata parità e non vince nessuno. Tanto per essere sicuro di essermi spiegato, supponendo che entrambi giochiamo con la migliore strategia possibile, prima di guardare le carte mi dici qual è la tua probabilità di vittoria. (*Samurai Futaba estrae la katana e, con alcuni fendenti, scrive sul muro la frazione, ridotta ai minimi termini, che è la probabilità richiesta da Mr. Dantley.*)

Voce fuori campo QUAL È LA SOMMA TRA NUMERATORE E DENOMINATORE DELLA FRAZIONE SCRITTA DA SAMURAI FUTABA?

18. *I 21 numeri di Connie*

Connie Mamma, sto scrivendo un elenco di 21 numeri interi, diversi tra loro, in modo tale che la somma di 11 qualunque di essi sia maggiore della somma degli altri 10. Ma non funziona se non uso numeri molto grandi.

Mamma Prymaat Qual è il più piccolo che puoi usare in un elenco del genere?

19. *La Germania va in guerra*

Il presidente biondo Steve, forse dovrei smettere?

Steve NO, PRESIDENTE, STA ANDANDO BENISSIMO. PERCHÉ NON CHIAMA LA GERMANIA?

Il presidente biondo D'accordo. *(Al telefono)* Pronto?

Angela Barack, sei tornato? Quanto mi sei mancato!

Il presidente biondo Sono Donald.

Angela Oh!

Il presidente biondo Ascolta: considera le condizioni

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 26 \\ a + b = 5 \\ b + c \geq 7. \end{cases}$$

Quali sono i numeri reali che verificano, Angela?

Angela Anghela, il mio nome si pronuncia Anghela.

Il presidente biondo *(Urlando al telefono)* Non provare a correggermi! Il vostro muro è crollato, la Germania fa schifo, l'America è la migliore! Preparati alla guerra! *(Sbatte giù la cornetta.)*

[Dare la risposta alla domanda con la somma di tutte le somme di terne che sono soluzione.]

20. *Samurai Craps*

Mr. Dantley Giochiamo a Samurai Craps. Si tira un dado... *(Samurai Futaba guarda con sospetto Mr. Dantley sfilando leggermente la katana)* Non preoccuparti, non è truccato. Tiro un dado a 20 facce, numerate da 2 a 21, leggo il risultato e ti dico, in modo del tutto casuale, un divisore di quel numero diverso da 1. Vinci se riesci ad indovinare il numero uscito senza guardare il dado.

Voce fuori campo SUPPONENDO CHE SAMURAI FUTABA UTILIZZI LA MIGLIORE STRATEGIA POSSIBILE PER VINCERE, QUAL È LA PROBABILITÀ CHE CIÒ ACCADA?

[Dare la risposta come somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini]

21. *Samurai Blackjack*

Mr. Dantley Si gioca con un mazzo di 52 carte: ci sono 13 tipi di carte, 4 per ciascun tipo. I tipi sono l'asso, le carte dal 2 al 10, e le tre figure: il Fante, la Donna e il Re. Nel gioco le carte hanno il valore stampato su di esse, ad eccezione dell'asso che ha valore 1 e delle figure che hanno valore 10. L'obiettivo del gioco è pescare carte dal mazzo cercando, sommando i valori delle carte pescate, di raggiungere il punteggio di 21, senza superarlo. Rompi il mazzo. *(Samurai Futaba estrae la katana e spezza il mazzo in due tagliandolo verticalmente. Mr. Dantley, senza battere ciglio, getta via il mazzo spezzato in due e ne prende un altro.)*

Mr. Dantley Io gioco sempre allo stesso modo: continuo a pescare carte finché il punteggio che ottengo diventa 17 o supera quel valore. Per esempio, se ho pescato 2, 6, 10 smetto di prendere carte, mentre se ho pescato 2, 5, 9 ne prendo un'altra.

Voce fuori campo QUANTE SONO LE SEQUENZE DI CARTE CON CUI MR. DANTLEY REALIZZA 21 CON AL MASSIMO 4 CARTE?

[Due sequenze sono distinte anche quando differiscono per l'ordine di pescata delle carte, mentre carte dello stesso tipo sono indistinguibili.]

22. *Lo Zimbabwe va in guerra*

Il presidente biondo Steve, i nostri alleati non ci ascoltano. . .

Steve CHIAMIAMO QUALCHE PICCOLO PAESE E MOSTRIAMOGLI CHI È IL CAPO. (*Si interrompe un momento per pensare*) CHIAMIAMO LO ZIMBABWE.

Il presidente biondo D'accordo. (*Chiama il dittatore dello Zimbabwe al telefono*) C'è un nuovo boss in giro.

Robert Chi parla? È Donald?

Il presidente biondo (*Contento di venir riconosciuto*) Sì!

Robert (*Con piglio deciso*) Ma chi credi di essere? Credi di sapere tutto tu? Ascolta questa—è complicata, meglio se chiedi aiuto a Steve; tanto è lì di fianco, giusto? (*Il presidente biondo apre la bocca incredulo*) Prendi un rettangolo $ABCD$ con AB lungo 90 km e BC lungo 80 km; disegna due cerchi tangenti tra loro all'interno del rettangolo; inoltre il cerchio di centro P è tangente ai lati AD e DC , il cerchio di centro Q è tangente ai lati AB e BC . Sei ancora lì? (*Il presidente biondo apre ancora di più la bocca*) Stiamo preparando un'arma che ha quelle dimensioni e che spazzerà via il tuo paesucolo insignificante. Ma bisogna sistemare i due cerchi in modo che l'area del triangolo APQ sia la massima possibile, poi coprirla tutta con materiale biologico umano. E sai che cosa useremo? Useremo (*parlando con sicurezza*) il tuo grasso, vecchio corpo fatto a pezzettini così minuscoli che neppure la CIA riuscirebbe a rimetterlo insieme. E non chiamarmi più! (*Sbatte giù la cornetta.*)

Steve (*Parlando sorridente al presidente smarrito*) POTEVA ANDARE PEGGIO. HA CALCOLATO QUANTI KM^2 È L'AREA MASSIMA?

23. *La strana domanda*

Yortuk e Georg suonano alla porta dei Conehead che aprono e li invitano a entrare..

Yortuk Siamo due tipi spontanei e folli, ma non sappiamo fare le operazioni. Dobbiamo sapere la somma e il prodotto dei nostri due codici, potete calcolarli voi? (*Allunga un foglietto che i Conehead leggono.*)

Connie Certo! La somma dei due codici è 110 e il prodotto dei due codici è 9263.

Papà Beldar Attenti! Connie è un po' distratta: al massimo una cifra della somma e al massimo una del prodotto potrebbero essere sbagliate.

Voce fuori campo QUANTO PUÒ VALERE AL MASSIMO UN CODICE?

24. *Le carte di Connie*

Connie sta giocando con un mazzo composto da 18 carte aliene, divise in 2 semi, ciascuno composto da un Re, una Regina, un Fante e i numeri dal 2 al 7; non ci sono gli Assi. Dopo aver mischiato il mazzo, ogni carta delle 18 parla.

Carta contrassegnata dal numero n Mi seguono almeno n carte del mio stesso seme.

Carta non contrassegnata da un numero Le carte attaccate a me sono del mio stesso seme.

Connie (*Sconsolata*) I due Re mentono sempre. Meno male che tutte le altre carte dicono sempre il vero.

Voce fuori campo IN QUANTI MODI POSSONO ESSERE ORDINATE LE CARTE NEL MAZZO MISCHIATO DA CONNIE?