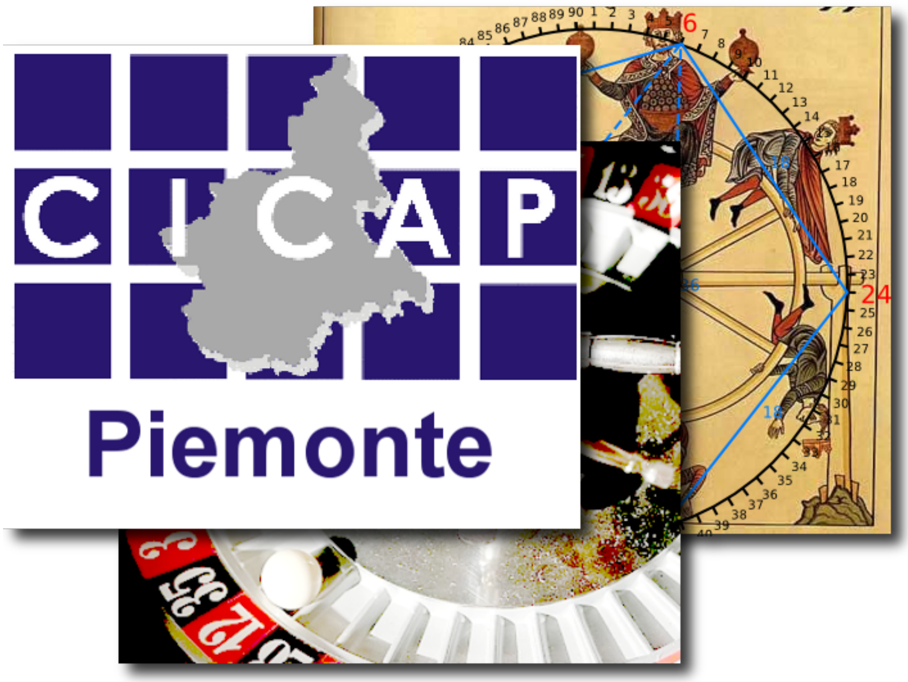
A che gioco giochiamo?

Quattro passi tra lottologia, matematica e giochi d'azzardo



Luca Antonelli - CICAP Cuneo

1 Introduzione

Il gioco del lotto attira un numero enorme di persone, che ogni anno riversano nelle casse del banco, cioè dello Stato, miliardi di euro, alla ricerca della vincita che può cambiare la vita, o anche solo per togliersi qualche sfizio economico. Questo popolo di giocatori ha attirato l'attenzione di molte persone che propongono metodi "vincenti", promettendo di ottenere ambi, terne e quaterne a ripetizione. Spesso questo servizio è fornito dietro il pagamento di una cifra, anche se molte ricevitorie stesse mettono a disposizoine dei propri clienti delle liste di numeri da giocare. A giustificazione di questi metodi vengono spesso pubblicizzate le vincite che vengono ottenute, ma cosa c'è di vero in queste affermazioni?

In queste pagine proveremo a dare qualche risposta; per farlo dovremo rivolgerci alla matematica, perché le leggi che governano il lotto, e tutti giochi d'azzardo sono quelle studiate dalla statistica. Come vedremo nella sezione 2, queste leggi spesso sono poco intuitive e possono ingannare il giocatore inesperto; dopo una breve introduzione storica (sezione 3), nella sezione 5 analizzeremo i differenti metodi e sistemi di gioco. Infine, nella sezione 6 vedremo più in dettaglio che cosa la matematica e la statistica possono dirci a proposito dei giochi d'azzardo. Anche se ci concentreremo sul gioco del lotto, molte delle considerazioni che faremo sono valide per qualunque gioco di azzardo; non useremo un linguaggio tecnico e limiteremo al minimo l'uso delle formule matematiche; chi è interessato agli aspetti matematici può trovare qualche approfondimento nelle appendici.

2 Gli inganni della matematica

Per poter capire come funzionano il lotto dobbiamo conoscerne le regole, ma queste non sono solo quelle che vengono scritte da chi gestisce il gioco, a cui aderiamo ogni volta che decidiamo di partecipare. Esistono infatti anche delle regole non scritte che governano tutti i giochi d'azzardo, alle quali tutti i giocatori si sottomettono: sono le regole della matematica e del calcolo delle probabilità. Di solito queste regole vengono accettate inconsapevolmente, e il "sacro timore" ispirato dalla matematica non invoglia ad approfondirle: il linguaggio della matematica può sembrare il gergo di una setta, fatto di formule astruse incomprensibili al di fuori della cerchia degli adepti.

C'è però un'altra causa della poca familiarità dei giocatori con la statistica e la probabilità: si tratta di due materie fortemente controintuitive, in cui spesso è difficile trovare le risposte giuste utilizzando il senso comune. Il nostro cervello infatti non è molto bravo a valutare in termini statistici situazioni lontane dalla nostra vita quotidiana, in particolare quando si trova in presenza di probabilità molto basse e avvenimenti rari. Un esempio classico di questa errori inconsci è la paura di prendere l'aereo: il nostro cervello valuta questo mezzo di trasporto come più pericoloso di quello che è realmente, e anche se le statistiche dimostrano che l'aereo è più sicuro dell'automobile, quasi nessuno ha paura di salire in automobile, mentre esistono molte persone che hanno timore di volare.

Ecco un altro esempio, un po' più complicato: immaginate di essere in una stanza con 25 persone e che uno dei presenti dica: ≪Scommetto 100€ che in questa stanza ci sono almeno due persone che sono nate nello stesso mese e nello stesso giorno≫. Accettereste una scommessa del genere? È chiaro che in una stanza con poche persone è improbabile che ci siano due persone con lo stesso mese e giorno di nascita, e in questo caso accettare la scommessa ci garantirebbe un guadagno quasi sicuro, mentre in una stanza affollata accadrebbe l'opposto. Ma 25 persone sono tante o poche per questo gioco? Di solito, la maggior parte delle persone è disposta ad accettare la scommessa, perché pensa che un gruppo di 25 persone sia abbastanza piccolo; in realtà già con 23 persone la probabilità di trovarne due con la stessa data di nascita è superiore al 50%, per la precisione è del 50,7%; questo risultato si può ricavare con qualche conoscenza elementare di calcolo delle probabilità (vedi appendice C.1). Tuttavia, anche dopo aver eseguito i calcoli resta l'impressione che 23 persone siano troppo poche e che la scommessa sia conveniente.

3 Storia del lotto

La parola "lotto" deriva dal francese *lot*, che significa sia "porzione" che "sorte", e che diviene *lote* in spagnolo e *loto* in portoghese. Un fonema analogo si ritrova nell'antico anglosassone *hlot* ("cosa toccata in sorte"), divenuto *loz* nel tedesco moderno e *lot* nel danese. Pertanto è prevalente la teoria secondo cui il termine arriva in Francia dalla Germania, diffondendosi poi negli altri paesi latini.

I progenitori del gioco vanno però ricercati in Italia: nel 1448 si ha notizia a Milano delle cosiddette "borse di ventura"; l'abitudine alle scommesse si diffuse rapidamente, tanto che nel 1588 uno statuto le proibì totalmente a Genova, decretando che non si poteva far gioco sulla vita del Pontefice, dell'imperatore, dei re, dei cardinali, sulla riuscita degli eserciti, sull'esito delle guerre, sui matrimoni, sulle elezioni dei magistrati o dei dogi e addirittura sulla peste. Fu proprio a Genova che nacque il lotto così come lo conosciamo oggi: nella città vigeva infatti l'abitudine di eleggere cinque magistrati a sorte da un gruppo di 90, ed era diffusa l'usanza di scommettere su coloro che sarebbero stati eletti; nel 1620 il gioco fu regolamentato con precisione, e nonostante le opposizioni di carattere morale si diffuse gradualmente in tutta Italia: i vari governi della penisola compresero subito che con il gioco era possibile realizzare dei notevoli introiti e lo autorizzarono, assicurandosene il monopolio. Il gioco varcò poi i confini italiani; a portarlo in Francia fu un personaggio di eccezione: Giacomo Casanova, che lo consigliò al ministro degli esteri francese come un mezzo rapido per rimpinguare le casse statali.

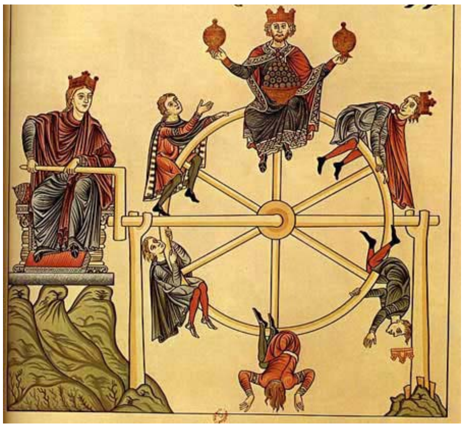


Figura 1: *La ruota della fortuna*, miniatura da un manoscritto del XII secolo.

Con l'avvento del Regno d'Italia, il gioco accrebbe ancora i propri volumi, passando dalle 6 ruote del 1863, fino alle 10 ruote del 1939; nel 2005 è stata aggiunta la cosiddetta "ruota nazionale". Anche il numero delle estrazioni è aumentato costantemente: in origine erano due o tre all'anno, divennero quindicinali nel 1807, settimanali nel 1871 e bisettimanali nel 1997; oggi siamo a tre estrazioni alla settimana, ed esiste anche il "lotto istantaneo", che consente di giocare in qualunque momento mediante una estrazione simulata.[1]

4 Le regole

Le regole del lotto possono essere riassunte molto brevemente: ogni ruota è costituita da 90 numeri e ad ogni estrazione vengono sorteggiati 5 numeri; l'estrazione è effettuata tramite una apposita urna meccanica che contiene 90 palline numerate da 1 a 90. Il gioco consiste nel fare previsioni sui risultati dell'estrazione; è possibile cercare di indovinare l'uscita di un singolo numero, di un coppia, e così via, su una o più ruote; in base ai numeri che sono stati indovinati e al tipo di puntata che si è scelto, si riceve una quota proporzionale alla somma che è stata puntata. Le giocate classiche sono:

- l'*ambata*, o *estratto semplice*, un solo numero, indipendentemente dall'ordine di estrazione;
- l'*estratto determinato*, un numero e la posizione in cui viene estratto;
- l'*ambo*, due numeri;
- il *terno*, tre numeri;
- la *quaterna*, quattro numeri;
- la *cinquina*, cinque numeri.

Ad esempio, puntando su una sola ruota e indovinando tutti i numeri giocati si ottengono le quote riportate in Tabella 1.

5 La lottologia: sistemi e metodi

La ricerca di metodi per migliorare le possibilità di vittoria nei giochi d'azzardo è vecchia almeno quanto il gioco stesso, ed è stata uno degli stimoli principali che ha portato alla nascita del calcolo della probabilità.

Ma come è possibile districarsi tra la selva di sistemi di gioco che vengono proposti, e proclamati come "vincenti"? Una considerazione semplice viene direttamente dal buon senso: su questi metodi mantengono veramente quello che promettono, perché chi li vende non si limita ad usarli lui stesso per guadagnare?

Come abbiamo già visto, quando c'è di mezzo la statistica, è comunque bene non fidarsi troppo del buono senso, e analizzare i metodi che vengono proposti è comunque interessante e ci permette di scoprire molte interessanti proprietà matemaica che governano i giochi.

[1] Le informazioni d questa sezine sono tratte da Wikipedia: Lotto, `http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Lotto&oldid=24361320` (in data 1 giugno 2009).

Occorre però una premessa: l'analisi di ogni singolo metodo non è una impresa semplice, perché la varietà di tecniche che viene proposta è molto ampia, e ciascuna tecnica di gioco presenta a sua volta moltissime varianti, anche molto complesse, tanto che spesso è difficile riuscire a a eseguire correttamente le istruzioni che vengono proposte; un esempio di queste giocate si può trovare alla sezione 5.3. Si tratta di un ostacolo non indifferente anche per chi vuole controllare i risultati di un metodo semplicemente verificando le somme effettivamente vinte dopo aver giocato: chi ha venduto il metodo spesso può ribattere che questo non è stato applicato correttamente, e per questo motivo non ha funzionato.

Tabella 1: Quote del lotto per una puntata semplice di 1 € su una sola ruota, con tutti i numeri indovinati.

Numeri giocati	Vincita lorda (euro)
1	11,23
2	250,00
3	4.500,00
4	120.000,00
5	6.000.000,00

Nonostante queste difficoltà, è comunque possibile distinguere alcune tipologie di base al cui interno si collocano i vari metodi di gioco; per ognuna di esse presenteremo una analisi semplificata, in modo da rendere chiari quali sono i principi che le regolano. Inoltre, come vedremo nella sezione 6.1, la matematica è in grado di darci una regola precisa che permette di calcolare il rendimento di un gioco, indipendentemente dal metodo utilizzato.

5.1 I numeri ritardatari

Il metodo che vanta più seguaci è probabilmente quello basato sui numeri cosiddetti *ritardatari*, ovvero quelli che da più settimane non escono su una determinata ruota: secondo i sostenitori del metodo, sono proprio i ritardatari i numeri su cui puntare per avere maggiori probabilità di vittoria. L'idea di fondo di questo metodo è che una sequenza di molte estrazioni che registra la mancanza un dato numero è molto improbabile; infatti ogni numero ha una probabilità di 1/18 di uscire su una estrazione di una ruota (5 numeri estratti su 90 numeri totali), e pertanto deve comparire mediamente una volta ogni 18 estrazioni su ciascuna ruota; una sequenza di 100 estrazioni "mancate" è molto rara, e uno di 150 estrazioni è ancora più difficile da realizzare; quindi già dalla centesima settimana di ritardo del numero conviene puntare su di esso, perché ritardi ancora più consistenti sono estremamente improbabili.

Questo ragionamento contiene in realtà una serie di errori di varia natura. Il più importante è che ogni estrazione non ha alcuna memoria delle precedenti: ogni volta le condizioni iniziali vengono "azzerate", i numeri reimmessi nell'urna, mescolati ed estratti, indipendentemente dai numeri usciti in precedenza. È certamente vero che lunghe sequenze di ritardi sono molto improbabili, tuttavia quando iniziamo a scommettere su un numero perché ritardatario, ad esempio da 90 estrazioni, queste estrazioni precedenti non hanno alcun valore statistico. Inoltre, seppur raramente, è assolutamente normale che si verifichino lunghi ritardi: consideriamo la Tabella 2, che elenca i dieci numeri più ritardatari registrati nella storia del lotto italiano.

Tabella 2: I dieci numeri più ritardatari.

Numero	Ruota	Estrazioni attese	Data di uscita
34	Cagliari	203	1 aprile 2006
8	Roma	201	23 agosto 1941
55	Bari	196	12 marzo 1960
82	Bari	193	27 novembre 1943
67	Venezia	191	18 ottobre 1924
71	Cagliari	191	26 giugno 1971
47	Bari	189	13 novembre 1917
28	Bari	187	26 luglio 1902
53	Venezia	182	9 febbraio 2005
11	Torino	181	4 aprile 1931

Il più grande ritardatario della storia è il 34 sulla ruota di Cagliari, che uscì il 1^{o} aprile del 2006, dopo 203 estrazioni mancate; la probabilità che si verifichi un evento simile si può calcolare abbastanza facilmente, e vale all'incirca di 1 su 109.443. Sembra una probabilità molto bassa, tuttavia questo calcolo vale per un singolo numero: ad ogni estrazione qualunque numero può far partire una sequenza di ritardi, per cui la probabilità di avere 203 settimane di ritardo scende a 1 su 21.889. Limitandoci agli anni dal 1947 al 2008, ed escludendo per semplicità la ruota nazionale aggiunta nel 2005, ci sono state 3.902 estrazioni su 10 ruote, per un totale di 39.020 estrazioni. Una sequenza di 203 estrazioni di ritardo diventa allora assolutamente normale (per chi è curioso, i calcoli sono riportati nell'appendice C.2).

Una versione alternativa del ragionamento dei ritardisti si richiama a quella che in matematica è nota come *legge dei grandi numeri*: poiché su un grande numero di estrazioni le frequenze di uscita dei 90 numeri tendono ad equivalersi, se un numero è in ritardo nelle uscite rispetto agli altri, nelle estrazioni successive dovrà in qualche modo "recuperare" lo svantaggio accumulato, uscendo con una frequenza maggiore.

Chi volesse approfondire la legge dei grandi numeri può leggere qualche dettaglio nell'appendice B. Qui ci limitiamo a proporre un esempio per chiarire quale equivoco c'è alla base di questo metodo; immaginiamo per semplicità di applicare il metodo dei ritardi al lancio di una moneta, e supponiamo che dopo aver realizzato 100 lanci si siano presentate 60 croci e 40 teste (vedi la prima riga della Tabella 3); abbiamo quindi che croce è uscita nel 60% dei casi, testa nel 40%. Nella terminologia statistica, si dice che testa e croce hanno una *frequenza* *assoluta* rispettivamente di 40 e 60 uscite, e una *frequenza relativa* del 40% e 60%.

Supponiamo di voler eseguire altri 900 lanci di moneta, per un totale di 1.000 lanci, e di voler puntare sull'uscita di testa o croce; un ritardista sosterrebbe che conviene giocare testa, visto che questa nei prossimi lanci dovrà recuperare e quindi uscire un maggior numero di volte. Proseguendo nell'esperimento, immaginiamo che al millesimo lancio siano uscite 530 croci e 470 teste (seconda riga della Tabella 3); come previsto dalla legge dei grandi numeri, le frequenze relative si sono effettivamente avvicinate: ora abbiamo il 53% di croci contro il 47% di teste; le teste hanno quindi recuperato parte dello svantaggio iniziale. Ma era davvero conveniente giocare testa? La terza riga della Tabella 3 riporta l'esito degli ultimi 900 lanci eseguiti; anche se le frequenze relative si sono avvicinate, questo non è successo per le frequenze assolute: sono infatti uscite 470 croci contro 430 teste. La legge dei grandi numeri infatti riguarda solamente le frequenze relative; purtroppo per i giocatori, il banco paga o riscuote le quote in base alle frequenze assolute di uscita dei vari eventi; ecco quindi che la legge dei grandi numeri non può venire in loro aiuto. Naturalmente questo non esclude che si possano verificare occasionalmente delle brevi sequenze favorevoli al numero ritardatario (e anche sequenze in controcorrente rispetto alla legge dei grandi numeri), ma queste non sono affatto più probabili di qualunque altra sequenza.

Tabella 3: Simulazione di 1.000 lanci di una moneta.

Lanci	Croci	Teste
100	60 (60%)	40 (40%)
1.000	530 (53%)	470 (47%)
900	*470*	*430*

5.2 La martingala

Il metodo della *martingala* (o *gioco al raddoppio*) può essere considerato una variante del metodo dei numeri ritardatari; anche questo metodo infatti prevede di puntare in maniera continuativa su un determinato evento, fino a quando questo non si realizza. Ad ogni giocata, la puntata viene incrementata di un fattore costante; in questo modo, la vincita che si realizza è in grado di coprire tutte le somme perse in precedenza.

Per fare un esempio semplice, continuiamo ad usare i lanci di una moneta; decidiamo di puntare sull'uscita della testa, iniziando con una puntata di 1€; se al lancio successivo esce effettivamente testa, il banco ci paga una vincita di 2€, che ci dà un guadagno netto di 1€; se invece esce croce, abbiamo perso la nostra puntata. Alla successiva giocata puntiamo 2€ sempre sulla testa; in questo modo, in caso di vittoria il banco paga 4€, che, sottratte le somme puntate (1€ alla prima puntata + 2€ alla seconda), ci danno un guadagno netto di 1€. In caso di ulteriore sconfitta, alla terza puntata raddoppiamo nuovamente la nostra scommessa e puntiamo 8€, e così via. Poiché ogni sequenza di sconfitte viene interrotta prima o poi da una vittoria, il raddoppio della puntata garantisce che al termine della sequenza è possibile recuperare tutte le somme perse in precedenza, e avere un guadagno netto di 1€.

Nella Tabella 4 è riportato uno specchietto delle giocate da eseguire ad ogni turno della sequenza.

Tabella 4: Martingala per il lancio di una moneta.

Turno	Posta	Spesa totale	Vincita	Guadagno realizzato
1	1	1	2	1
2	2	3	4	1
3	4	7	8	1
4	8	15	16	1
5	16	31	32	1
10	512	1.023	1.024	1
15	16.384	32.767	32.768	1
20	524.288	1.048.575	1.048.576	1
n	2^{n-1}	$2^n - 1$	2^n	1

A prima vista si tratta di un metodo quasi "sicuro": ogni sequenza di sconfitte è destinata prima o poi a concludersi, e in quel momento il giocatore è certo di avere guadagnato 1€ (o qualunque puntata iniziale avesse fatto); si tratta di una vincita piccola, ma è sempre possibile ricominciare una nuova sequenza, al cui termine si avrà nuovamente un guadagno di 1€. Questo ragionamento nasconde però un problema: per poter continuare il gioco dopo una sconfitta dobbiamo disporre di un capitale sufficiente a raddoppiare la posta: tuttavia ogni giocatore dispone di un capitale finito, e può quindi permettersi solamente un numero finito di raddoppi; se si verifica una sequenza negativa sufficientemente lunga, il giocatore perde tutto e non è più in grado di continuare il gioco.

Questa eventualità è molto più probabile di quanto si pensi: raddoppiando la puntata ad ogni turno la posta in gioco diventa alta molto in fretta, come ben sanno i matematici che conoscono le progressioni aritmetiche (chi è interessato all'argomento può andare all'appendice A). Ad esempio, per perdere un capitale iniziale di 10.000€ sono sufficienti 14 teste consecutive, evento che a prima vista può apparire molto raro (in effetti la probabilità che si verifichi è di 1 su 16.384); tuttavia, la vincita di 1€ che si ottiene con questo metodo è molto bassa: se si vuole realizzare un guadagno apprezzabile occorre giocare molte partite, e in questo modo il rischio di una rovina totale diventa concreto. Inoltre il gioco che è stato descritto è alla pari tra banco e giocatore;[2] nella realtà la quote pagate dal banco sarebbero inferiori, costringendo chi gioca a vincere di meno,

[2] Vedi il capitolo 6.1 per il rendimento

oppure ad alzare ancora di più le proprie puntate per conrinuare ad avere lo stesso margine di guadagno.

Il metodo della martingala viene utilizzato anche per giochi diversi, cambia solamente il coefficiente che va usato per moltiplicare la puntata ad ogni turno: in generale, se il banco paga k volte la posta in caso di vittoria, il coefficiente di moltiplicazione è:

$$\frac{k}{k-1}$$

Nella Tabella 5 è riportato lo schema di giocata per l'ambo nel gioco del lotto ($k = 11{,}23$). Anche se l'incremento delle puntate è minore di quello per testa o croce, occorre considerare che la probabilità di vittoria è molto più bassa, e quindi è molto più probabile avere delle lunghe serie negative.

Tabella 5: Martingala per l'ambo al lotto.

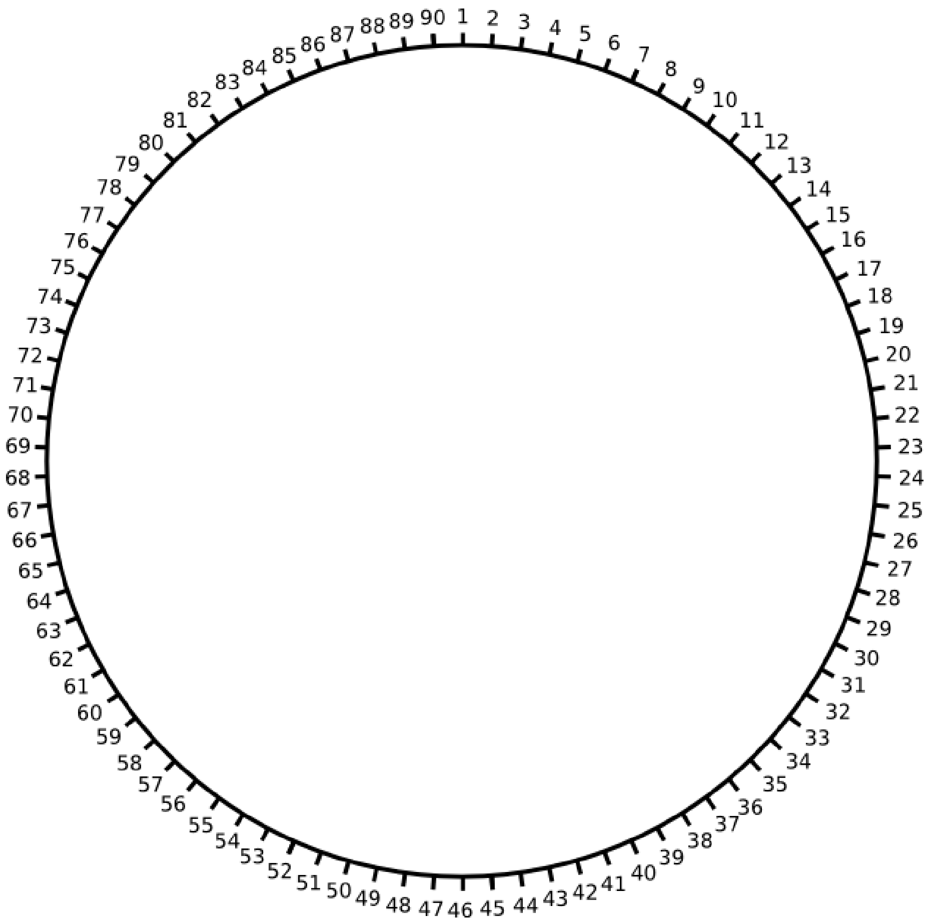
Turno	Posta	Spesa totale	Vincita	Guadagno realizzato
1	1	1	11,23	10,23
2	1,10	2,10	12,33	10,23
3	1,21	3,30	13,53	10,23
4	1,32	4,63	14,86	10,23
5	1,45	6,08	16,31	10,23
50	95,54	1.073,90	1.084,13	10,23
100	10.230,77	114.881,27	114.891,50	10,23
n	$\left(\frac{k}{k-1}\right)^{n-1}$	$\frac{k^n-(k-1)^n}{(k-1)^{n-1}}$	$\frac{k^n}{(k-1)^{n-1}}$	$k-1$

5.3 La ciclometria

Sotto il nome di *ciclometria* va una serie molto varia di metodi di gioco, caratterizzati tutti dal fatto che i numeri da giocare si ottengono attraverso una serie di manipolazioni effettuate con l'ausilio del "cerchio ciclometrico", su cui i numeri vangono disposti in ordine, in modo che 1 e 90 risultino adiacenti, come in Figura 2. Spesso si tratta di manipolazioni discretamente complicate, che prevedono di effettuare tutta una serie di somme e moltiplicazioni incrociate; a questa complicazione si aggiunge il fatto che i metodi sono presentati in un linguaggio quasi gergale, per cui seguire tutti i dettagli del metodo può essere abbastanza difficile.

Le manipolazioni previste variano molto da un metodo all'altro, e prevedono numerose varianti, per cui è in pratica impossibile, oltre che inutile, fare un'a-

Figura 2: I numeri del lotto disposti nel cerchio ciclometrico.



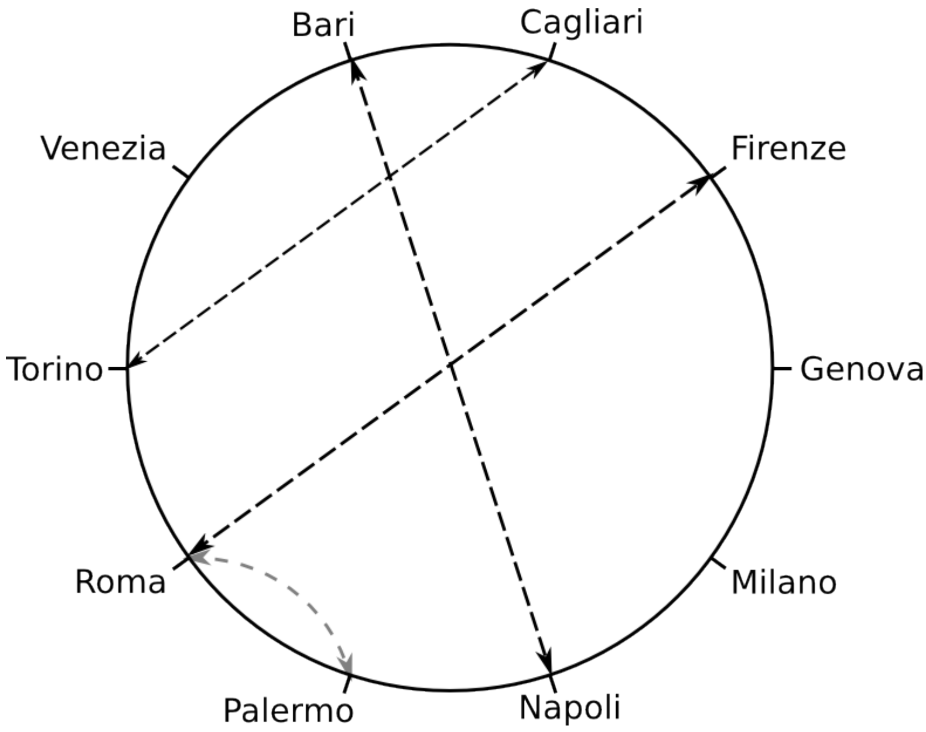
nalisi precisa di un singlo metodo. Per avere un'idea di quello che propone la ciclometria, possiamo vedere un metodo tipico:

> [...] su due ruote *consecutive*, oppure *diametrali* oppure *gemellari*, riscontrare due *ambi* di *somma eguale*, esclusa la somma 45, in posizione *isotopa* e *consecutiva*, e che presentino almeno una *differenza ciclometrica* equivalente alle distanze 9-18-27-36. Alla verifica di questa condizione si opererà nel modo che segue: si calcolerà il *diametrale* del *triplo sommativo* ed avremo trovato la nostra ambata, mentre come abbinamenti per ambo sceglieremo il diametrale della somma comune ed il doppio del triplo sommativo. L'ambata e i due ambi andranno giocati sulle ruote dove si è verificata la condizione per 8 colpi.

Districarsi tra i termini usati dai lottologi (che nel testo sono indicati in corsivo) è molto difficile, a titolo di curiosità proviamo a spiegare il metodo nel dettaglio, chi preferisce può passare direttamente alla sezione successiva.

Introduciamo un po' di glossario: oltre che i numeri , è possibile disporre anche le ruote lungo un cerchio, come in Figura 3. Con questa configurazione, le ruote consecutive sono ad esempio Bari-Cagliari, o Roma-Torino, mentre due ruote diametrali sono quelle che si trovano lungo un diametro, quindi in posizione opposta l'una all'altra; infine due ruote gemellari sono due ruote che si trovano in posizione simmetrica rispetto all'elenco in ordine alfabetico, come la prima e l'ultima (Bari e Venezia), la seconda e la penultima (Cagliari e Torino), e così via.

Figura 3: Le ruote del lotto disposte nel cerchio ciclometrico. Sono indicate una coppia di ruote adiacenti (Palermo-Roma), una coppia di ruote diametrali (Bari-Napoli) e due coppie di ruote gemellari (Cagliari-Torino e Firenze-Roma).



Per ognuna delle coppie indicate sopra, cerchiamo su ogni ruota una coppie di numeri (ambi), usciti nella stessa posizione su ciascuna ruota (isotope), e in posizione consecutiva (ad esempio, il secondo e terzo numero di ogni ruota), tali che la somma delle due coppie sia uguale, ma non valga 45. Un esempio sono le coppie (84, 9) e (90,3), la cui somma è 93.

La differenza ciclometrica tra due numeri è la differenza di posizioni calcolata disponendo i 90 numeri sulla ruota ciclometrica; corrisponde alla normale differenza, oppure al suo complemento a 90, se la differenza ciclometrica è superiore a 45; ad esempio la differenza ciclometrica tra 84 e 6 vale 12 perché $84 - 6 = 78 > 45$ e $90 - 78 = 12$; nel nostro caso, tra i quattro numeri deve esistere almeno una differenza ciclometrica pari a 9, 18, 27, o 36; poiché $9 - 3 = 6$, la condizione è verificata, quindi abbiamo una coppia utile per poter estrarre i numeri da giocare.

Procediamo allora al calcolo del triplo sommativo, che nonostante il nome, altro non è che la somma dei quattro numeri trovati, da cui si eseguono successive sottrazioni di 90, fino a che non diventa inferiore a 90:[3] $84 + 9 + 90 + 3 = 186$ e $186 - 90 - 90 = 6$. Il diametrale di 6 è il numero opposto a 6 sulla ruota ciclometrica dei 90 numeri, e si trova sommando $6 + 45 = 51$. Abbiamo quindi trovato la puntata per l'ambata, ovvero il singolo numero, che è 51.

Il 51 viene infine abbinato ad altri due numeri per calcolare gli ambi:

- la somma comune è 93, che riportata alla circonferenza ciclometrica è $93 - 90 = 3$; il suo diamatrale è $3 + 45 = 48$; il primo ambo da giocare è allora 51 - 48;
- il doppio del triplo sommativo è $6 \times 2 = 12$; il secondo ambo è 51 - 12.

Se avete avuto la pazienza di leggere fino a qui, e accusate un po' di mal di testa, si tratta di un sintomo normale: i metodi ciclometrici sono complicati e spesso è impossibile giocarli correttamente, una bella comodità per chi li vende, dato che di fronte alle eventuali lamentele di chi non ha vinto può agevolmente ribattere che il metodo non è stato applicato per intero.

5.4 La smorfia

Il metodo più tradizionale per la scelta dei numeri da giocare al lotto, ancora oggi molto popolare, è quello della *Smorfia*, che associa ogni elemento di un sogno ad un particolare numero da giocare. Le origini di questo metodo sono molto antiche, e vengono fatte risalire fino all'interpretazione dei sogni nell'antica Grecia (il termine Smorfia deriverebbe da quello del dio del sonno Morfeo) e alla *Qabbalah* ebraica, che associa un significato ed un numero ad ogni sequenza di parole o segni della Bibbia (da qui viene anche il termine *cabala*). Tramandata oralmente, è arrivata fino a noi in numerose forme, ma la più famosa è certamente quella napoletana, che è stata anche fonte di ispirazione per il cinema.

Naturalmente non è possibile fare alcuna considerazione matematica sulla possibile efficacia di questo metodo, anche perché esistono molte tradizioni della Smorfia, come è facile rendersi conto con un breve giro su Internet: esistono infatti molti siti che

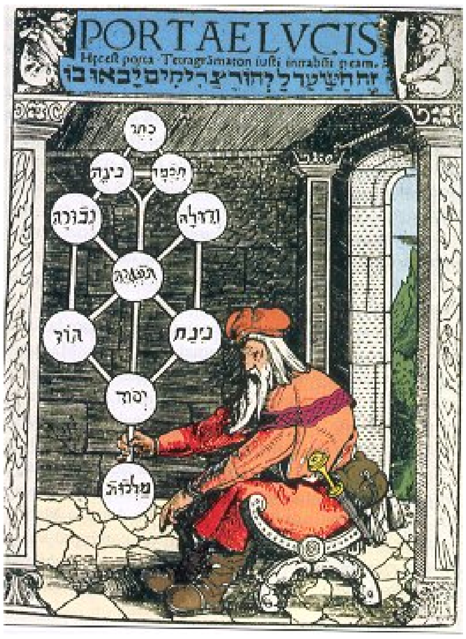


Figura 4: La Cabala ebraica è una delle possibili ispiratrici della Smorfia. Nell'immagine, l'*Albero della Vita*, da una illustrazione medievale.

[3] Lo stesso risultato si può ottenere considerando il resto della divisione intera per 90.

consentono di inserire le descrizione di un sogno e forniscono i numeri corrispondenti, ma ognuno di essi dà riposte diverse; ad esempio, per “tulipano”, il sito Ricevitorie.it (`http://www.ricevitorie.it/`) dà il numero 6, Lotto Italia (`http://www.lottoitalia.com/`) il numero 38, Lottomatica Italia (`http://www.lottomaticaitalia.it/home/index.html`) addirittura due diversi numeri, 67 per la Smorfia napoletana, e 66 per la Smorfia “moderna”. In questo modo i numeri da giocare crescono a dismisura, anche perché le combinazioni possibili sono innumerevoli: lo stesso elemento del sogno potrebbe essere interpretato come “tulipano”, o “fiore”, o “campo di tulipani”, e per ognuna di queste interpretazioni esiste un numero differente. È evidente che giocando tutti questi numeri, magari su più ruote e per più estrazioni consecutive, alla fine si realizza qualche vincita, ma difficilmente questa potrà superare la spesa sostenuta.

6 La matematica

La matematica appare un po' dovunque quando si parla di giochi d'azzardo; questi ultimi hanno accompagnato la nascita stessa del calcolo delle probabilità: i primi studi in questo settore portano infatti nomi come il *Problema dei punti* di Luca Pacioli (dove i punti sono quelli guadagnati al gioco da due frati), il *Libro dei giochi di fortuna* di Girolamo Cardano, e *Sopra le scoperte dei dadi* di Galileo. Nel seguito vengono presentati in maniera semplice alcuni risultati interessanti e utili per capire meglio il funzionamento di giochi come il lotto.

6.1 Il rendimento

Il concetto matematico più importante per un giocatore del lotto, o qualunque altro gioco d'azzardo, è quello di *rendimento*; esso rappresenta la speranza media di vincita, ovvero il risultato che un giocatore si aspetta di realizzare dopo un grande numero di giocate. La formula per calcolarlo è così semplice che possiamo riportarla, senza timore di spaventare chi legge:

$$R = p\frac{V}{P},$$

dove:

- R è il rendimento;
- p è la probabilità di realizzare una vincita;
- V è la somma che viene pagata dal banco in caso di vittoria;
- P è la posta, ovvero la somma da pagare per partecipare al gioco.

Per chi fosse comunque allergico alla simbologia metematica, possiamo scrivere facilmente la regola di calcolo: il rendimento di un gioco si ottiene moltiplicando la probabilità di vittoria per la somma incassata in caso di vittoria, e dividendo il risultato per la somma che viene richiesta per giocare.

Ad esempio, nel caso di una puntata su un singolo numero (ambata), poiché vengono estratti 5 numeri su 90, la probabilità di vittoria è $p = \frac{5}{90} = \frac{1}{18} \simeq$

0,0556, la somma pagata è 11,236 volte la posta, ovvero $V = 11{,}236P$, per cui si ha:

$$R = \frac{1}{18}\frac{11{,}236P}{P} = \frac{11{,}236}{18} \simeq 0{,}624 = 62{,}4\%.$$

Questo significa che per ogni 100€ puntati, ci aspettiamo che ne ritornino indietro in media 62,4; i 37,6€ restanti sono il margine di guadagno del banco. Quello sopra indicato è il guadagno medio (o meglio, la perdita media) che il giocatore si deve attendere se esegue un gran numero di giocate, anche se ogni singola giocata dà un esito diverso, e possono verificarsi singole sequenze fortunate che portano il giocatore in vantaggio nei confronti del banco, ma anche sequenze peggiori, in cui il giocatore può perdere molto più dei 37,6€ previsti.

Lo stesso ragionamento è applicabile a qualunque altra giocata; mentre i fattori V e P sono di solito noti, e dipendono dal regolamento del gioco, calcolare la probabilità di vittoria può essere più complicato e richiede qualche conoscenza di calcolo delle probabilità; nell'appendice C.3 si può vedere un calcolo di esempio per l'ambo.

Per altri tipi di gioco, il valore di p non può essere fissato a priori: nelle scommesse sui cavalli, la probabilità di affermazione di ciascun cavallo viene valutata dai bookmaker in base all'esperienza, ai risultati ottenuti nelle gare precedenti, e alle condizioni attuali del cavallo; sulla base di questa valutazione, i bookmaker variano il valore di V, in modo da garantirsi il guadagno desiderato. Per le lotteria, la situazione è ancora differente: i premi in palio (V) e il prezzo del biglietto (P) sono fissati a priori, mentre la probabilità di vittoria dipende dai biglietti che vengono acquistati, e per ogni singolo biglietto vale

$$p = \frac{1}{N},$$

dove N è il numero totale dei biglietti acquistati. In teoria, se venissero venduti pochi biglietti, il rendimento del gioco potrebbe anche superare il 100%; nella pratica, questo non si verifica mai, e il gestore delle lotteria riesce sempre ad assicurarsi un numero sufficiente di clienti.

Al di là delle particolarità del calcolo, per qualunque gioco d'azzardo gestito da un banco il rendimento del giocatore è sempre inferiore al 100%; in caso contrario, il banco andrebbe in perdita e sarebbe costretto a chiudere. Questo significa che sul lungo periodo ogni giocatore è destinato a perdere i propri soldi, anche se a un giocatore che ha realizzato una vincita molto alta potrebbe non bastare una intera vita per tornare in passivo.

Nella Tabella 6 sono riportati i rendimenti calcolati per alcuni giochi classici.

È interessante notare come le giocate del lotto che prevedono premi più alti abbiano un rendimento più basso: ad esempio la cinquina, che paga 6.000.000 di volte la posta, ha un rendimento di solo il 2,3%; questa distribuzione dei premi serve a proteggere il banco nel caso si verifichi un numero più alto del previsto di vincite sulle giocate con la posta maggiore, che potrebbe costringere il banco stesso ad una forte perdita, sia pure limitata ad una singola giocata. Strategie analoghe vengono adottate dai bookmaker, che ad esempio penalizzano le puntate sui cavalli che essendo più deboli, hanno quote maggiori.

Tabella 6: Rendimento calcolato per vari tipi di giochi. I giochi con rendimento variabile sono indicati con un asterisco (*); il loro rendimento è soltanto stimato.

Gioco	Rendimento
Roulette (rosso/nero)	98,61%
Roulette (puntata semplice)	97,30%
Roulette (puntata multipla)	97,30%
Cavalli - meno di 6 (*)	77%
Cavalli - tra 6 e 9 (*)	69%
Lotto - estratto semplice	62,4%
Lotto - ambo	62,4%
Cavalli - più di 9 (*)	62%
Totocalcio	37%
Lotto - terno	36,2%
Superenalotto (*)	34%
Gratta e Vinci (*)	20,64%
Lotto - quaterna	15,6%
Lotto - cinquina	2,3%
Lotteria - 10.000.000 biglietti	0,42%
Lotteria - 30.000.000 biglietti	0,14%

6.2 L'utilità matematica

Calcolando il rendimento di un gioco come presentato nella sezione 6.1, siamo in grado di capire quali sono i giochi più sfavorevoli (o meno sfavorevoli) tra quelli che ci vengono proposti. Tuttavia, poiché il rendimento di un dato gioco è lo stesso, esso non ci permette di distinguere tra diverse modalità di gioco. Ad esempio, è possibile giocare in modi diversi sull'estratto semplice del lotto, puntando la medesima cifra ad ogni estrazione, o innalzando la posta come nel gioco al raddoppio. Il diverso modo di giocare non cambia il rendimento, che è sempre del 62,4%, ma il rischio è distribuito in modo diverso: nel primo caso ci aspettiamo una perdita piccola e quasi certa contro una vittoria alta ma difficle da realizzare; nel secondo abbiamo una vincita molto piccola ma frequente contro una perdita rara ma molto elevata. Anche se il il rendimento finale è lo stesso, il primo tipo di gioco appare decisamente più moderato e "consigliabile", perché una piccolo esborso di denaro è sopportabile dal giocatore e difficilmente lo può portare alla rovina; il gioco al raddoppio invece ci appare intuitivamente rischioso, perché esiste la possibilità concreta di perdere tutto il propro capitale.

Una considerazione analoga si potrebbe fare nei confronti di una polizza assicurativa, che in un certo senso si può considerare come un gioco d'azzardo: pagando regolarmente il premio assicurativo abbiamo una probabilità molto bassa di ottenere un rimborso in caso di danno, e una probabilità molto alta di non ricevere niente in cambio, perché fortunatamente non abbiamo avuto sinistri. Il rendimento è evidentemente in favore delle compagnie assicurative, che altrimenti sarebbero costrette a chiudere, e qualcuno in vena di facile ironia potrebbe quindi paragonare le compagnie assicurative ai gestori dei casinò; nonostante questo molti di noi stipulano assicurazioni e le giudicano a ragione vantaggiose: è meglio pagare una piccola somma ogni anno e premunirsi dal rischio di perdere tutto qualora si verificasse un incidente grave.

Per poter comprendere meglio queste situazioni abbiamo bisogno di uno strumento in più, che ci arriva direttamente dagli economisti: l'*utilità*. Questa viene solitamente descritta come una misura della soddisfazione o della felicità che ci può dare un bene (in questo caso, la vincita promessa dal gioco d'azzardo). Tramite l'utilità possiamo dare una veste matematica all'idea che lo stesso guadagno o la stessa perdita possono avere un valore diverso a seconda della persona che riguardano: se disponiamo di un reddito mensile di 1.000€, perderli tutti quanti al gioco rappresenta una rovina totale, a meno di non disporre di qualche risparmio che ci consenta di tirare avanti; se il nostro reddito è di 2.000€, la stessa perdita non è certamente piacevole, ma si traduce solamente in una difficoltà momentanea; se siamo tra i pochi fortunati con un reddito di 10.000 euro, la perdita diventa semplicemente una fastidiosa uscita supplementare. Se consideriamo l'utilità, invece del rendimento, metodi come quello del raddoppio si rivelano immediatamente come pericolose tecniche a utilità bassissima, perché ci espongono al rischio di grandi perdite. Le stesse considerazioni valgono naturalmente anche per il denaro guadagnato: guadagnare 2.000€ non rende due volte più felici che guadagnare 1.000€, come sa bene anche Zio Paperone, che conserva ancora la sua Numero Uno, il primo dollaro della sua carriera di multimilionario.

L'utilità di una data somma di denaro è evidentemente soggetta anche a fattori psicologici, per cui non esiste una regola precisa per definirla; gli economisti hanno comunque elaborato una serie molto ampia di *funzioni di utilità*, con caratteristiche anche molto diverse tra di loro, che vengono applicate a livello teorico, nello studio della gestione del rischio, o per considerazioni di macroeconomia.

6.3 L'impossibilità dei sistemi

I sistemi, ovvero insiemi di giocate multiple realizzate secondo determinati criteri, riscuotono una grande popolarità presso i giocatori, e molti dei metodi che vengono proposti ne fanno utilizzo. La loro popolarità è aumentata negli ultimi anni, in quanto molte grandi vincite sono state realizzate da sistemisti; si è così diffusa la credenza che i sistemi possano incrementare le probabilità di vittoria del giocatore, perché sarebbero in grado di selezionare le scommesse migliori.

Nella realtà, il risultato che ci possiamo attendere da un qualunque gioco è determinato dal suo rendimento (vedi capitolo 6.1), che non dipende dal modo in cui giochiamo, ma unicamente dal premio messo in palio e dalla probabilità di vittoria, che sono fissati dalle regole del gioco. I sistemi, così come qualunque altro metodo di gioco, si differenziano tra di loro non per il diverso rendimento, ma per la diversa distribuzione del rischio: alcuni di essi prevedono puntate basse e poco rischiose, ma con basso guadagno; altri prevedono la possibilità di guadagni maggiori, ma al prezzo di un investimento in denaro molto superiore e di un maggiore rischio di perdere tutto.

Ma allora perché i sistemisti sembrano vincere di più? La risposta è abbastanza semplice: i sistemisti sono solitamente i giocatori più assidui, e un sistema è composto da un grande numero di giocate, per cui la gran parte delle giocate che vengono effettuate ad ogni estrazione fa parte di sistemi. Non è quindi sorprendente che i sistemi ottengano una percentuale maggiore di vittorie; il rendimento però rimane costante, perché alle maggiori vincite corrisponde anche una maggiore quantità di denaro giocato.

6.4 La rovina del giocatore

Il termine *rovina del giocatore* viene usato dai matematici per una serie di teoremi diversi, che hanno però in comune lo stesso concetto di base: nelle normali condizioni di gioco imposte dal banco il giocatore incallito, che continua a giocare indefinitamente e non riesce a smettere, è destinato a perdere tutto il suo capitale.

Una delle forme più interessanti del teorema è la seguente: immaginiamo un giocatore che dispone di un capitale di x euro, e che ad ogni giocata può perdere o guadagnare 1€; il giocatore si prefigge l'obiettivo di arrivare a guadagnare la cifra di X euro, dopodiché esce dal gioco; ovviamente potrebbe non arrivare mai a guadagnare la cifra che desidera, e anzi potrebbe perdere tutto ed essere obbligato ad uscire dal gioco. Se la probabilità di vittoria ad ogni giocata è p, allora possiamo calcolare la probabilità che il giocatore arrivi a racimolare la somma prevista prima di perdere tutto. I calcoli necessari per ricavare la probabilità sono riportati nell'appendice C.4; senza entrare nel dettaglio delle formule possiamo comunque riassumere il risultato nella seguente regola: come era lecito aspettarsi, più alta è la cifra H che il giocatore si prefigge di vincere, più bassa è la probabilità di ottenerla prima di fallire, in quanto la cifra a denominatore diventa sempre più grande. Per un giocatore "incontentabile", che intenda giocare all'infinito indipendentemente dalla somma vinta, la probabilità di andare in rovina diventa pari a 1.

Il primo teorema ad essere formulato con il nome di "rovina del giocatore" fu invece scoperto da Christiaan Huygens (1629-1695): prendiamo due giocatori che scommettono sui lanci di una moneta; ad ogni lancio, il giocatore che vince incassa 1€ dall'altro. Il gioco termina quando uno dei due giocatori perde tutto il proprio denaro; Huygens mostrò che un gioco di questo tipo è destinato a terminare con probabilità 1, e se il capitale in dotazione ai due giocatori è rispettivamente di C_1 e C_2 euro, allora le probabilità che ciascun giocatore vada in rovina sono:

Figura 5: Christiaan Huygens.

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{C_2}{C_1 + C_2} \\ P_2 &= \frac{C_1}{C_1 + C_2}. \end{aligned}$$

Si vede chiaramente che, tanto più grande è il capitale iniziale del secondo giocatore, tanto più alta è la probabilità di rovina del primo giocatore, e viceversa; nel caso del lotto, e di quasi tutti i giochi d'azzardo gestiti da un banco, la situazione è molto sbilanciata in favore del banco stesso, che può disporre di capitali molto più grandi di qualsiasi giocatore: la probabilità di soccombere in queste condizioni è quindi altissima. La situazione è ancora peggiore, perché il risultato previsto di Huygens vale nel caaso di un gioco equo; nella realtà, il rendimento del giocatore è inferiore a 1, e la probabilità di rovina è ancora più alta.

Una terza variante della "rovina del giocatore" è la seguente: un giocatore che in caso di vittoria incrementa il valore delle proprie puntate, ma mantiene la medesima puntata in caso di sconfitta, è anch'esso destinato a perdere tutto con una probabilità che si avvicina al 100% mano a mano che il giocatore prosegue a giocare. Anche questa è una situazione che si verifica spesso nella realtà; ad esempio, i casinò forniscono ai giocatori vincenti delle fiche di taglio più grande, che li incoraggiano a puntare delle somme maggiori.

Appendice

In questa appendice riportiamo alcuni approfondimenti, utilizzando un linguaggio più tecnico e molte formule rispetto alla atre sezioni; per comprendere a fondo alcuni passaggi è necessaria anche qualche compotenza teorica, indicata caso per caso. Per ogni argomento viene indicato all'inizio il livello di difficoltà.

A Progressioni geometriche

Livello: facile.

Una progressione geometrica è un oggetto matematico molto semplice: è una successione di numeri in cui ogni numero è ottenuto dal precedente moltiplicando per un fattore costante, chiamato *ragione*. Ad esempio, questa è una progressione di ragione 3:

$$12, 36, 108, 324, 972, 2916, 8748, 26244, \dots$$

Nella vita comune troviamo molti esempi di progressione geometrica: ad esempio, il denaro depositato in una conto corrente frutta un interesse fisso, per cui ogni anno risulta moltiplicato per un fattore costante; se non vengono fatti prelievi, ogni anno il capitale cresce secondo una progressione geometrica. Molti fenomeni hanno un andamento che è simile a quello di una progressione geometrica; tra questi, la crescita della popolazione mondiale, l'inflazione, o il decadimento di una sostanza radioattiva; in quest'ultimo caso, la massa di sostanza radioattiva diminuisce con il tempo, e la progressione geometrica ha ragione minore di 1.

Le progressioni geometriche hanno alcune proprietà a prima vista sorprendenti. Una di queste è la capacità di crescere molto rapidamente: se pieghiamo prendiamo un foglio di carta, anche molto sottile, e iniziamo a piegarlo in due più e più volte, dopo poche piegature il foglio raggiunge una spessore tale che è impossibile continuare, e in generale è praticamente impossibile proseguire oltre le 6-7 piegature. Infatti, se prendiamo un normale foglio dello spessore di 0,1 mm e lo pieghiamo, il risultato è quello mostrato nella Tabella7.

Tabella 7: Risultati della piegatura di un foglio di carta.

Piegature	Fogli	Spessore (mm)
0	1	0,1
1	2	0,2
2	4	0,4
3	8	0,8
4	16	1,6
5	32	3,2
6	64	6,4
7	128	12,8

Con uno spessore di oltre un centimetro, è pressoché impossibile piegare il foglio, ma se ci riuscissimo e potessimo continuare, dopo 15 piegature il foglio avrebbe superato l'altezza di un canestro da basket (3,28 m), e ne basterebbero 22 per arrivare fra i primi grattacieli del mondo (419,43 m), o 27 per superare in altezza l'Everest (oltre 13.000 m)!

Poiché il rendimento di un gioco è dato in percentuale, se il giocatore o il banco reinvestono sempre tutto il capitale nel gioco, i loro guadagni crescono in maniera esponenziale: ad esempio, un rendimento fisso del 105% significa che ad ogni giocata il capitale del giocatore viene moltiplicato per 1,05. Anche se si tratta di una crescita più lenta di quella della piegatura del foglio, il risultato è lo stesso: anche con un margine di guadagno minimo si possono accumulare cifre enormi; questo spiega perché i casinò prosperano anche in presenza di rendimenti appena superiori al 100%. Se un giocatore riuscisse ad alterare il rendimento a proprio favore, potrebbe guadagnare delle cifre tali da far chiudere ben presto il gioco causando il fallimento del banco.

B La legge dei grandi numeri

Livello: medio.

La legge dei grandi numeri è una dei teoremi più "vecchi" della teoria della probabilità, con una storia di quasi tre secoli: fu infatti scoperta nel 1713 da Jacob Bernoulli; successivamente è stata però ripresa e affinata da molti altri matematici. Il concetto di base dimostrato da Bernoulli è rimasto lo stesso, ma per enunciarlo abbiamo bisogno di qualche definizione presa dalla statistica:

variabile casuale : è un oggetto che rappresenta i possibili risultati di un determinato evento probabilistico: ad esempio, per il lancio di un dado possiamo definire una variabile casuale X che può assumere i valori 1, 2, 3, 4, 5, o 6, con probabilità di $\frac{1}{6}$ ciascuno;

valore atteso : è un numero che rappresenta approssimativamente il "risultato medio" che ci attendiamo per un dato evento; si indica $E(X)$ e si ottiene moltiplicando ciascun possibile risultato della variabile casuale per la sua probabilità di uscita; ad esempio, per i lanci di un dado:

$$E(X) = \frac{1}{6}\cdot 1+\frac{1}{6}\cdot 2+\frac{1}{6}\cdot 3+\frac{1}{6}\cdot 4+\frac{1}{6}\cdot 5+\frac{1}{6}\cdot 6 = \frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{3}{6}+\frac{4}{6}+\frac{5}{6}+\frac{6}{6} = \\ = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = 3{,}5.$$

Se consideriamo un gioco con un grande numero di estrazioni, e lo descriviamo tramite una variabile casuale, la legge dei grandi numeri ci dice che la media aritmetica dei valori assunti dalla variabile nelle varie estrazioni tende ad essere uguale al valore atteso. Nel caso dei lanci di un dado, la media dei punti ottenuti con un gran numero di lanci si avvicina sempre più a 3,5; analogamente, le frequenze relative di uscita dei numeri del lotto si avvicinano al valore atteso delle frequenze teoriche. Come abbiamo visto nel capitolo 5.1, non è possibile applicare la legge dei grandi numeri alla frequenze assolute, perché queste non sono ottenibili tramite delle medie.

La legge dei grandi numeri garantisce che anche gli eventi casuali possono avere una certa "prevedibilità"; è in base ad essa, ad esempio, che le compagnie assicurative possono prevedere il numero di incidenti di auto che si verificano in un anno, e stabilire di conseguenza il prezzo delle polizze, anche se nessuno è in grado di prevedere se e quando un determinato veicolo avrà un incidente.

In effetti, se consideriamo un grande numero di casistiche, avviene quella che gli statistici chiamano ironicamente *legge dei numeri molto grandi*: anche eventi estremamente rari, che di solito tendiamo a considerare quasi impossibili, si possono verificare: di solito non ci preoccupiamo di un infortunio ha una probabilità su 1.000.000 di accadere a ciascuno di noi, perché è estremamente improbabile, tuttavia secondo la legge dei grandi numeri ci possiamo attendere all'incirca 60 infortuni di questo tipo in Italia. Questo naturalmente non intacca la validità della legge dei grandi numeri, perché questi avvenimenti eccezionali ma molto rari hanno un effetto minimo sul valore medio.

C Calcoli

C.1 Probabilità e compleanni

Livello: medio.

In questa sezione calcoliamo la probabilità che in un gruppo di n persone ci siano almeno due persone con lo stesso mese e giorno di nascita. Come spesso accade, è più semplice calcolare la probabilità dell'evento opposto, ovvero che non ci sia nessuna persona nata lo stesso giorno: partiamo con un gruppo formato da una persona sola: la probabilità che non ci sia nessuno nato lo stesso giorno è ovviamente $p_1 = 1$. Se aggiungiamo una persona, in 364 casi su 365 questa sarà nata in un giorno diverso dalla prima, quindi la probabilità che i due non siano nati lo stesso giorno dell'anno è:

$$p_2 = \frac{364}{365}.$$

Se arriva una terza persona, la probabilità che non sia nata nello stesso giorno degli altri due è di $p_3 = \frac{363}{365}$.(su 365 giorni possibili, 363 sono sicuramente diversi dalle date di nascita degli altri due); perché nessuno dei tre sia nato nello stesso giorno si devono verificare due eventi:

- i primi due non devono essere nati lo stesso giorno (probabilità $p_2 = \frac{364}{365}$);
- il terzo non deve essere nato negli stessi giorni dei primi due (probabilità $p_2 = \frac{363}{365}$).

La probabilità che questi eventi accadano insieme è data dal prodotto delle probabilità egli eventi singoli:

$$p = \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363}{365 \cdot 365 \cdot 365} = \frac{365(365-1)(365-2)}{365^3}.$$

Abbiamo aggiunto il fattore $p_1 = 1 = \frac{365}{365}$ per contemplare anche il caso banale di un solo componente del gruppo, e fatto qualche calcolo per semplificare il risultato. Lo stesso ragionamento si può ripetere aggiungendo persone fino a 365, dopodiché se ne arrivano altre è sicuro che almeno due siano nati lo stesso giorno; la probabilità che in un gruppo di n persone nessuna sia nata lo stesso giorno è:

$$p = \frac{365(365-1)\cdots(365-n+1)}{365^n}.$$

L'evento opposto, cioè che qualcuno sia nato lo stesso giorno, ha probabilità:

$$1-p = 1 - \frac{365(365-1)\dots(365-n+1)}{365^n}.$$

Alcuni preferiscono non usare la formula sopra, i cui termini variano di numero a seconda di n, e usano il più compatto simbolo di fattoriale, $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, funzione disponibile sulle calcolatrici scientifiche:

$$1-p = 1 - \frac{365!}{n! \cdot 365^n}.$$

Usando una delle formule sopra è possibile calcolare quando la probabilità che ci interessa supera il 50%; nella Tabella8 è possibile vedere che questo accade per $n = 23$.

Tabella 8: Probabilità che in un gruppo di n persone ce ne siano almeno due nate lo stesso mese.

n	Probabilità
2	0,27%
5	2,71%
10	11,69%
20	41,14%
22	47,57%
23	**50,73%**
50	97,04%
100	99,99997%

In questo calcolo abbiamo commesso qualche piccola imprecisione; la prima è che non abbiamo tenuto conto degli anni bisestili; la seconda è che abbiamo considerato tutti giorni come equivalenti, mentre nella realtà le nascite sono distribuite in maniera diversa per ogni giorno dell'anno. Se dovessimo tenere conto di questi fattori il calcolo diventerebbe molto più complicato, e il risultato finale non cambierebbe di molto.

C.2 I numeri ritardatari

Livello: difficile.

Vogliamo calcolare la probabilità che, a partire da una determinata estrazione, un qualnque numero nonn esca su una ruota per n settimaneconsecutive. Iniziamo calcolando la probabilità che un singolo numero prefissato abbia un ritardo di n settimane; questa parte è relativamente facile: estraendo 5 numeri su 90, ci sono 85 possibilità su 90 che il nostro numero non esca in una data estrazione, con una probabilità pari a

$$\frac{85}{90} = \frac{17}{18}.$$

La probabilità della mancata uscita su più estrazioni si ottiene moltiplicando il numero sopra n volte; otteniamo così:

$$p = \underbrace{\frac{17}{18} \cdot \frac{17}{18} \cdot \ldots \cdot \frac{17}{18}}_{n \text{ volte}} = \left(\frac{17}{18}\right)^n.$$

Per il ritardo record di $n = 203$ estrazioni del 34 sulla ruota di Cagliari, si ha $p = 0,000009137$, pari a poco meno di 1 probabilità su 109.442.

Per il calcolo nel caso generale, possiamo ragionare così: ad ogni estrazione su una ruota escono 5 numeri; ognuno di essi può dare origine, a partire dalla estrazione successiva, ad una serie ritardataria, con probabilità p uguale a quella calcolata sopra. In questi casi è più facile fare il calcolo ragionando all'inverso, ovvero calcolando la probabilità che un numero non dia origine ad una sequenza di n ritardi; questa probabilità vale $1 - p$, quindi la probabilità che nessuno dei 5 numeri dia origine ad una sequenza di n ritardi è $(1 - p)^5$ (applichiamo sempre la regola della moltiplicazione delle probabilità per eventi indipendenti). Calcolando ancora una volta l'evento complementare di questo, la probabilità che che almeno uno dei numeri dia origine a una sequenza di n ritardi è allora:

$$1 - (1 - p)^5 = 1 - \left(1 - \left(\frac{17}{18}\right)^n\right)^5.$$

Per $n = 203$ si ottiene un valore di 0,000045685, pari a circa 1 probabilità su 21.889.

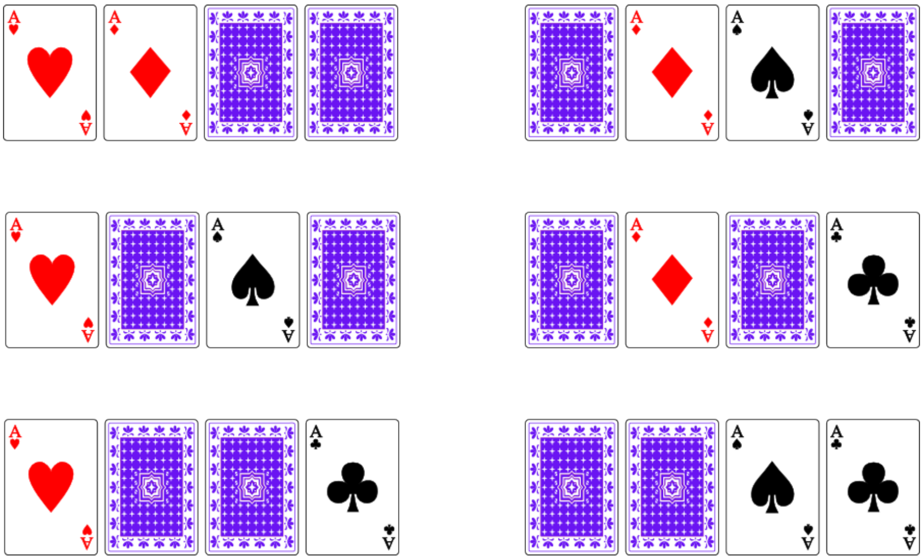
Negli anni dal 1947 al 2008 ci sono state 4.105 estrazioni, per cui ogni ruota ha avuto a disposizione $4.105 - 203 = 3.902$ possibili sequenze ritardatarie (le 203 estrazioni più recenti vanno ovviamente eliminate dal calcolo, in quanto non hanno potuto generare sequenze ritardatarie sufficientemente lunghe). Se consideriamo tutte la nove ruote storiche del lotto, le possibili sequenze ritardatarie sono $3.902 \times 9 = 35.118$; un ritardo di 203 estrazioni è quindi un evento assolutamente non sosprendente nell'arco di un cinquantennio di attività.

C.3 Il rendimento dell'ambo

Livello: medio.

Per eseguire il calcolo, avremo bisogno di una formula che deriva dal *calcolo combinatorio*, la branca della matematica che studia i vari modi di disporre un numero prefissato di oggetti: in questo caso ci interessa la formula della *combinazioni di k oggetti da n oggetti*, che esprime il numero di modi in cui è possibile estrarre k oggetti da un insieme formato da n oggetti, senza considerare l'ordine di estrazione; ad esempio, se abbiamo i 4 assi di un mazzo di carte e vogliamo sapere quante coppie è possibile formare con essi, dobbiamo calcolare le combinazioni di 2 oggetti da 4, che sono 6, come indicato nella Figura 6.

Figura 6: I sei modi possibili di estrarre due carte da quattro assi.



La formula per il caso generico è la seguente:

$$C(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

dove $n!$ viene chiamato *fattoriale* di n ed è il prodotto di tutti i numeri da 1 a n: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$; il fattoriale è di solito un numero molto grande, per cui nel calcolo è utile farsi aiutare da una calcolatrice o da un computer.

Passiamo allora a calcolare il rendimento dell'ambo: utilizziamo la formula introdotta nel capitolo 6.1:

$$R = p\frac{V}{P},$$

dove:

- R è il rendimento;
- p è la probabilità di realizzare una vincita;
- V è la somma che viene pagata dal banco in caso di vittoria;
- P è la posta, ovvero la somma da pagare per partecipare al gioco.

Dal regolamento del gioco del lotto, sappiamo che in caso di vittoria viene pagata 250 volte la posta, quindi $V = 250P$. La probabilità di vittoria è il rapporto tra il numero di cinquine estratte da 90 numeri e contenenti un ambo (i casi favorevoli), e il numero di tutte le cinquine che è possibile estrarre da 90 numeri (i casi totali). Iniziamo da quest'ultimo, che corrisponde alle combinazioni di 5 oggetti su 90:

$$C(90, 5) = \frac{90!}{5!\,85!} = 43.949.268.$$

Infine, il numero di cinquine che contengono l'ambo che abbiamo puntato si può ottenere così: immaginiamo che i due numeri che ci interessano escano immediatamente nelle prime due estrazioni; a questo punto ci restano 3 numeri da estrarre da un totale di 88; questo può essere fatto in $C(88, 3)$ modi diversi, che corrispondono a ciascuna cinquina vincente:

$$C(88, 3) = \frac{88!}{3!\,85!} = 109.736.$$

La probabilità che cerchiamo è allora:

$$p = \frac{109.736}{43.949.268} = 0{,}002496879.$$

Abbiamo ora tutti i dati necessari al calcolo del rendimento:

$$R = 0{,}002496879\frac{250}{P} \simeq 0{,}624 = 62{,}4\%,$$

che risulta essere lo stesso dell'estratto semplice.

C.4 La rovina del giocatore

Livello: difficile.

Consideriamo un giocatore che dispone di una somma di h euro da investire; ad ogni giocata, ha un a probabilità p di vincere 1€ e una probabilità $1 - p$ di perdere 1€. Vogliamo calcolare la probabilità che dopo un numero finito di giocate, il giocatore raggiunga una somma di H euro, che indicheremo in simboli con $P\{H|h\}$.

Al primo turno il giocatore può vincere o perdere un euro; se vince, a quel punto la sua probabilità di raggiungere H euro è $P\{H|h + 1\}$, se perde, la probabilità vale $P\{H|h - 1\}$. Allora la probabilità iniziale si può scomporre in due:

$$\begin{aligned}
&P\{H|h\} = pP\{H|h + 1\} + (1 - p)P\{H|h - 1\}\\
&P\{H|h + 1\} - \frac{1}{p}P\{H|h\} + \frac{1-p}{p}P\{H|h - 1\} = 0\\
&P_{h+1} - \frac{1}{p}P_h + \frac{1-p}{p}P_{h-1} = 0,
\end{aligned}$$

dove l'ultima riga si ottiene ponendo $P_n = P\{H|h\}$ ed è una equazione alle differenze. Per risolvere questo tipo di equazioni, la teoria ci dice che dobbiamo risolvere la corrispondente equazione polinomiale:

$$x^2 - \frac{1}{p}x + \frac{1-p}{p} = 0, \qquad (1)$$

le cui soluzioni sono $x_1 = 1$ e $x_2 = \frac{p-1}{p}$. Se $x_1 \neq x_2$ (ovvero $p \neq \frac{1}{2}$), l'equazione alle differenze ha allora la seguente soluzione:

$$P_h = P\{H|h\} = Ax_1^h + Bx_2^h = A + B\left(\frac{p-1}{p}\right)^h, \tag{2}$$

Non ci resta che determinare il valore di A e B; per fare questo, consideriamo i seguenti casi estremi:

- se il capitale iniziale del giocatore è 0, non c'è alcuna possibilità di raggiungere il montepremi H: $P\{H|0\} = P_0 = 0$;
- se il capitale iniziale del giocatore è H, il giocatore è certo di raggiungere il montepremi H, perché lo possiede già: $P\{H|H\} = P_H = 1$. Sostituendo i valori trovati nella formula 2 abbiamo allora il sistema:

$$\begin{cases} P_0 = A + Bx_2^0 = A + B = 0 \\ P_H = A + Bx_2^H = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{x_2^H - 1} \\ B = \dfrac{-1}{x_2^H - 1} \end{cases}$$

Riprendendo l'equazione 2 e sostituendo i valori trovati, si ottiene:

$$P\{H|h\} = P_h = \frac{1 - x_2^h}{1 - x_2^H}.$$

Se la probabilità di vittoria p vale $\frac{1}{2}$, allora l'equazione polinomiale 1 ha due soluzioni coincidenti $x_1 = x_2 = 1$, e la soluzione dell'equazione alle differenze è:

$$P_h = A + Bh.$$

In maniera analoga a quanto fatto sopra, si possono calcolare i valori $A = 0$ e $B = \frac{1}{H}$, e si ottiene:

$$P\{H|h\} = P_h = \frac{h}{H}.$$

Riassumendo, la probabilità di ottenere la cifra desiderata prima di fallire è pari a:

$$P\{H|h\} = \begin{cases} \dfrac{1 - \left(\frac{p-1}{p}\right)^h}{1 - \left(\frac{p-1}{p}\right)^H} & \text{se} \quad p \neq \frac{1}{2} \\ \dfrac{h}{H} & \text{se} \quad p = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

D Licenza d'uso