

ISTRUZIONI GENERALI

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Si ricorda anche che occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo degli zeri iniziali.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale x è il più grande intero minore o uguale ad x .
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:
 $\sqrt{2} = 1,4142$ $\sqrt{3} = 1,7321$ $\sqrt{7} = 2,6458$ $\pi = 3,1416$

8 marzo 2013

Gara a Squadre – Testideiproblemi

1. UN'ALTRA CANZONE DI GHIACCIO E FUOCO (PUNTI 20)

I sette dei degli Andali si incontrano per prevedere chi uscirà vincitore dalla guerra tra i cinque re che si sta per sviluppare. Ad ogni incontro dei sette dei, esattamente uno tra loro dice il vero, gli altri sei dicono il falso.

Il primo, il Padre, dice: "Vincerà re Ceelvyer Lannister."

Il secondo, la Madre, dice: "Vincerà re Lewyj Stark."

Il terzo, il Fratello, dice: "Vincerà re Beapys Baratheon."

Il quarto, la Vecchia, dice: "Vincerà re Ceelvyer Lannister."

Il quinto, la Vergine, dice: "Vincerà re Munry Baratheon."

Il sesto, il Guerriero, dice: "Vincerà re Beapys Baratheon."

Il settimo, lo Straniero, dice: "Vincerà re Munry Baratheon."

Nessuno dei sette dei menziona il quinto re Unton Greyjoy. Qual è il numero totale delle lettere del nome e del cognome del vincitore?

2. ORIGAMI A CAPOTEMPESTA (PUNTI 20)

Nel suo castello a Capotempesta, progettando la guerra contro gli altri quattro re, Munry Baratheon si diletta a piegare fogli a metà, cioè piega un foglio a quattro bordi in modo da dividere a metà due bordi opposti facendo combaciare gli altri due. Prende un foglio che non è un quadrato; dopo averlo piegato due volte a metà, si accorge di aver ottenuto un quadrato di area 36cm^2 . Munry si accorge che quella è l'area massima che poteva ottenere piegando a metà il foglio iniziale due volte. Pensa allora a come piegare a metà due volte il foglio iniziale in modo da ottenere il perimetro massimo possibile. Quanti cm è lungo quel perimetro?

3. CO DICHI AD APPRODO DEL RE (PUNTI 20)

L'accesso alla porta principale di Approdo del Re è controllato da un codice a cinque cifre che cambia ogni giorno. Il re Ceelvyer Lannister ha deciso che, per non sforsare troppo il cervello su inezie simili, il codice dice sia sempre composto usando esattamente due sequenze di due diverse cifre, ad esempio 44333e07777, ma non 43334e neppure 77707. La Mano del Re protesta dicendo che la frazione p/q ottenuta dividendo il numero totale dei codici proposti da Ceelvyer Lannister per il numero di tutti i possibili codici di cinque cifre è minuscola e questo genererà inutili rischi per la sicurezza della città. Ma Ceelvyer Lannister dice alla Mano di non preoccuparsi, presa la frazione p/q con p e q primi fra loro, calcola la differenza $q - p$ e mostra alla Mano che non è piccola. Che numero ha calcolato Ceelvyer Lannister?

4. LAPISTADEI DRAGHI (PUNTI 20)

I giovani draghi spiccano il volo da un campo a forma di trapezio di area 165m^2 . La base maggiore misura 16m , l'altezza 15m . Crescendo i draghi hanno bisogno di un campo di volo più ampio: vengono perciò prolungati i lati obliqui del trapezio fino a che si incontrano a formare un triangolo (con base la base maggiore del precedente campo trapezoidale). Quanto è l'area del nuovo campo di volo esteso?

5. CEELVYER ONOMALE**(PUNTI 20)**

Ceelvyer, che fa parte della ricchissima Casa Lannister, valuta i nomi propri di persona in un modo leggermente inusuale. Classifica infatti le 21 lettere maiuscole dell'alfabeto italiano in base ad un loro carattere topologico: il numero di buchi della loro scrittura stampata. La lettera B vale 2, le lettere A D O P Q R valgono 1 ciascuna, tutte le altre valgono 0. Quindi valuta il valore di un nome come somma dei valori delle lettere componenti. Dopo un'attenta analisi, decide di chiamare il suo quarto figlio con il nome di PDOR dopo aver preso in considerazione tutte le liste di quattro lettere (anche di sole consonanti) e con quello stesso valore. Quanti sono le liste di quattro lettere con lo stesso valore di PDOR che Ceelvyer Lannister ha escluso?

6. ARALDICA DI WESTEROS**(PUNTI 20)**

Lo stemma araldico scelto da Brienne Tarth è appeso ad una parete: è una croce verde su sfondo bianco. Lo stemma è di forma quadrata. I due bracci della croce sono parallelogrammi tutti contenuti nel quadrato. Di ciascun parallelogrammo, due lati giacciono sui due lati orizzontali del quadrato e due dei quattro vertici coincidono con due vertici diagonalmente opposti del quadrato. Ogni lato dello stemma quadrato è lungo 60 cm. Ogni lato orizzontale dei due parallelogrammi è lungo 15 cm. Quanto misura la superficie bianca dello stemma in cm²?

7. CALCOLO ALLA BARRIERA**(PUNTI 30)**

Per passare il tempo presso la Barriera, i Guardiani della Notte fanno calcoli lunghissimi per mantenere il cervello riscaldato. Ad esempio, Sam scrive numeri in sequenza e somma la sequenza ottenuta. Oggi scrive righe di ventuno numeri: nella prima riga scrive due 1, poi 2, 3, ecc. fino a 20; nella seconda riga scrive 1, poi due 2, quindi 3, 4, ecc. fino a 20; nella terza riga, scrive 1, 2, due 3, poi 4, 5, ecc. fino a 20; e continua così fino a scrivere una riga con 1, 2, ecc. fino a 19, finendo con due 20. Infine somma tutti i numeri scritti. Che risultato ottiene?

8. ATTRAVERSO IL TUNNEL**(PUNTI 30)**

La sezione verticale del tunnel nella Barriera a Castello Nero ha forma di trapezio con basi di 6,26 m e 76,82 m. In alcuni punti del tunnel, per assicurare stabilità, è montata una trave di sostegno, parallela alle basi, che divide la sezione verticale del tunnel in due trapezi equivalenti. Quanto è lunga una di queste travi di sostegno in cm?

9. CALCOLO ALLA BARRIERA, II**(PUNTI 30)**

Il 99^o comandante dei Guardiani della Notte utilizza funzioni per impostare calcoli che gli riscaldino il cervello. Per x e y numeri interi positivi, scrive $qu(x, y)$ per il quoziente della divisione di x con y , cioè è quel numero q tale che $x - (q \times y)$ sia un numero compreso tra 0 e $y - 1$, estremi inclusi (ad esempio, $qu(13, 4) = 3$). Oggi calcola numeri secondo la seguente formula:

$$a_i = (-1)^i + (-1)^{qu(i, 2)} + (-1)^{qu(i, 3)} + (-1)^{qu(i, 4)}.$$

Facendo variare i da 1 a 2013 estremi inclusi, quante volte il comandante trova che il valore di a_i è 0?

10. CALCOLI ALLA BARRIERA, III**(PUNTI 30)**

Un'altra delle funzioni che il comandante dei Guardiani della Notte utilizza è una funzione $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ razionale di variabile razionale tale che

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

per ogni x e y numeri razionali. Il comandante sa che $f\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{8}{7}$ e calcola $f\left(\frac{49}{2}\right)$. Che risultato trova?

11. LA CAVA DEL MARE STRETTO**(PUNTI 40)**

In una caverna su un'isola del Mare Stretto, ci sono 5 scatole parlatrici di materiali diversi. Ogni scatola contiene un numero naturale e dice solo il vero o solo il falso. La scatola 1 è in ferro e dà due informazioni:

- "il numero dentro di me è il quoziente del numero nella scatola 5 e del numero nella scatola 2"
- "un terzo del numero dentro la scatola 3 è il prodotto di tutti i numeri primi minori di 15 eccetto uno (di questi numeri primi)"

La scatola 2 è in legno di pino e dà due informazioni:

- "almeno una scatola di metallo dice il falso"
- "il numero nella scatola 1 è minore di 200"

La scatola 3 è in rame e dà due informazioni:

- "il numero dentro di me è la differenza tra il numero nella scatola 5 e il numero nella scatola 2"
- "il numero dentro la scatola 1 è primo"

La scatola 4 è in legno di noce e dà due informazioni:

- "la scatola 5 dice il falso"
- "il numero nella scatola 3 è divisibile per 11"

La scatola 5 è in piombo e dice

- "il numero nella scatola 1 è minore di 220"
- "tutte le scatole di legno dicono il falso"

Che numero c'è nella scatola 5?

12. MAGIA A ROCCIA DEL DRAGO**(PUNTI 40)**

A Rocca del Drago, dove i giorni dei mesi sono numerati da 3 a 33, il re Beapys Baratheon ha un triangolo magico che cambia forma e dimensione a seconda del giorno del mese, ma è sempre rettangolo e le lunghezze dei suoi lati sono numeri interi. Se il numero del giorno non è primo, il triangolo resta invariato, mentre se il numero del giorno è primo il cateto minore ha la lunghezza pari al numero del giorno. In quale data, ogni mese, la sua area diventa maggiore di 1500 per la prima volta?

13. LO STRAPP O DI LEWYJ**(PUNTI 40)**

Nelle sue ricerche, Lewyj Stark non trova il libro delle discendenze delle Cas e di Westeros. In modo molto ambiguo, Lord Varys gli dice quel che lui sa del libro: tutte le pagine tra le due copertine sono numerate in successione a partire dal numero d , nel libro è stato strappato esattamente un foglio, la somma dei numeri sulle pagine rimanenti è 65000. Lewyj Stark dice che queste informazioni non servono. Lord Varys gli risponde che si sbaglia, ad esempio si può calcolare quante pagine aveva in origine il libro. Qual numero determina Lord Varys?
[Ogni foglio ha due pagine, ciascuna numerata.]

14. IL GIOCO DELL'OCA ALLA BARRIERA**(PUNTI 40)**

Alla Barriera si gioca un "gioco dell'oca semplificato" su un tabellone con 6 caselle, numerate rispettivamente $0, 1, 2, \dots, 5$. È un solitario che si gioca inserendo il segnalibro sulla casella di partenza, lanciando un comune dado a 6 facce e spostando il segnalibro di tanti passi quanti indicati dal dado. La casella 0 è quella di partenza, la casella 5 è quella d'arrivo. Nella casella 1 è scritto: "vanella casella 5 " e nella casella 4 è scritto: "va nella casella 3 "; il gioco termina quando si arriva alla casella 5 . Se si superava la casella 5 si prosegue ripassando per la casella 0 . Oggi, contemplando un suo Guardiano che gioca a cava, il comandante Jeor Mormont ha calcolato la probabilità che il gioco non sia ancora finito dopo il sesto turno e, a quel punto, il segnalibro del giocatore si trovi sulla casella 2 . Se p/q è la probabilità calcolata dal comandante, con p e q primi tra loro, si determina il numero $q - p$.

15. CALCOLI ALLA BARRIERA, IV**(PUNTI 50)**

Come detto, per passare il tempo presso la Barriera i Guardiani della Notte fanno calcoli lunghissimi. Jon, partendo dal numero 2013 , sottrae 1 e moltiplica il risultato per 1 , poi sottrae 2 al risultato del prodotto e moltiplica per 2 quello che ottiene, e continua fino a quando sottrae 2013 e moltiplica per 2013 . Quali sono le ultime tre cifre del numero che ottiene?

16. CALCOLI ALLA BARRIERA, V**(PUNTI 50)**

Vicino alla Barriera, fa freddo e non capita nulla. Per scaldarsi, i Guardiani della Notte complicano i calcoli. Ad esempio, Edd l'Addolorato scrive tutte le possibili coppie (p, q) di numeri primi (dunque maggiori di 1) tali che

- $p + 2q$ sia primo
- $6p + q$ sia primo
- $p + q - 124$ sia primo.

Poi scrivono il prodotto $p \cdot q$ per ciascuna di queste coppie. Qual è il minimo prodotto che scrivono?

17. LA SFIDA SULLA SPIRALE VOLANTE**(PUNTI 50)**

Invece di affrontarsi in battaglia, i re Mury Baratheon e Unton Greyjoy decidono di stabilire chi sia il più coraggioso sfidandosi a girare sulla spirale volante che simula il volo dei draghi. Salgono ciascuno su una navicella che è fissata ad un braccio meccanico rigido che collega la navicella al palo verticale centrale della spirale volante e che, mantenendosi parallelo al terreno, si solleva mentre ruota intorno al palo centrale per bloccarsi istantaneamente quando raggiunge l'altezza di 45 m. I bracci salgono verticalmente alla velocità costante di 0.5 m/sec e ruotano intorno al palo alla velocità angolare costante di $20^\circ/\text{sec}$. Il braccio che sostiene la navicella di Mury Baratheon ruota su una circonferenza lunga 12 m, il braccio che sostiene la navicella di Unton Greyjoy ruota su una circonferenza lunga 10 m. Quando la giostra inizia a funzionare facendo contemporaneamente ruotare e salire le navicelle, ciascuna di queste descrive un'elica cilindrica. Quando le navicelle si bloccano, Unton Greyjoy vomita. Mury Baratheon ride dichiarandosi vincitore. Sceso a terra, Unton Greyjoy si giustifica con i suoi soldati spiegando che è colpa del percorso più lungo che faceva la sua navicella. Quanto vale la differenza tra i due percorsi in m?

18. I DADI DI BRAN**(PUNTI 50)**

Bran Stark gioca con usuali dadi a sei facce, moltissimi. Li accosta uno all'altro sul tavolo (senza impilarli o lasciare spazi), in modo da formare rettangoli di varie dimensioni. Si attiene ad una regola precisa: i numeri sulle facce con cui due dadi sono accostati devono fare per somma 7. In ogni dado la somma delle facce opposte è 7. Quanti dadi, al massimo, si possono usare per formare uno dei suddetti rettangoli?

19. I VOLI DI DROGON**(PUNTI 50)**

Il drago Drogon si allena a voli precisi. Partendo dal suo trespolo, fa un volo di 200 m verso Est, da dove è arrivato fa un secondo volo verso Nord ancora di 200 m. Dal punto dove è arrivato, si esercita in balzi precisi: un balzo verso Est di 1 m, si volge di 45° in senso antiorario—cio è punta a Nord-Est—e fa un balzo di 2 m, si gira di 45° in senso antiorario—cio è punta a Nord—e fa un balzo di 3 m, si gira di 45° in senso antiorario—cio è punta a Nord-Ovest—e fa un balzo di 4 m, si gira di 45 gradi in senso antiorario—cio è punta ad Ovest—e fa un balzo di 5 m e così via, finché l'ultimo balzo che fa è di 400 m. A che distanza dal punto di partenza si trova alla fine dei suoi balzi?

20. IL PALAZZO DI LITTLE FINGER**(PUNTI 60)**

Il palazzo di Lord Petyr Baelish ha 70 piani. Ogni piano ha 7 finestre rivolte verso sud. Ad ognuna di queste corrisponde un ufficio, un appartamento o una sala d'attesa. La distribuzione segue le seguenti regole:

1. A ogni piano non possono esserci più sale d'attesa che uffici
2. Una stanza sopra un appartamento è una sala d'attesa
3. Se una stanza direttamente sopra ad un ufficio è adiacente a due altre stanze, allora queste ultime due stanze devono essere dello stesso tipo.

Qual è il numero minimo di uffici presenti nel palazzo?

21. I GRATADI LEWYJ**(PUNTI 60)**

Lagrata alla finestra della cella in cui è rinchiuso Lewyj Stark è formata da ventidue sbarre, undici verticali, undici orizzontali, che formano 100 quadrati tutti uguali di lato 5 cm. Lewyj Stark passa il suo tempo formando con un filo sottile rettangoli di perimetro 1 m con i vertici su incroci tra sbarre (e con tutti e quattro i lati di lunghezza positiva). Quanti rettangoli può formare?

22. I ADIFESADI BRONN**(PUNTI 70)**

Sul campo di battaglia Tyrion Lannister si aspetta che i soldati di Beapys Baratheon attaccheranno risalendo il fiume Acquanera. Ha piazzato tre fari, due sulle rive opposte a est e a ovest. Tyrion è sulla torre a 8 km dal faro sulla riva est e a 5 km dall'altro. Sa anche che la distanza tra i due fari è 8.9 km. Il terzo faro è piazzato su una boa nel fiume esattamente a metà della linea che congiunge i due fari sulle rive. La nave vedetta di Beapys Baratheon compare sulla linea dei tre fari e Tyrion si accorge che il suo angolo di visuale tra il faro sulla riva est e la nave vedetta coincide con il suo angolo di visuale tra la boa e il faro sulla riva ovest. Calcola perciò immediatamente il rapporto tra la distanza della nave vedetta dal faro sulla riva est e quella della nave vedetta dal faro sulla riva ovest e, per preparare la difesa, comunica a Bronn quanto è lontana la nave vedetta dal faro sulla riva ovest. Quanti metri è lontana la nave vedetta dal faro sulla riva ovest?

23. GLI ANELLI IN ANELLATI**(PUNTI 70)**

Il nuovo emblema di Casa Lannister è una coppia di anelli identici, formati facendo ruotare un quadrato attorno ad un'aretta complanare con il quadrato e parallela alla sua diagonale. I due anelli sono incatenati l'uno all'altro (uno passa nel buco dell'altro). Un'antica leggenda narra che, se la diagonale del quadrato usato per ottenere gli anelli è lunga 30 cm e se il volume occupato dalla coppia di anelli è il minimo possibile, su ogni punto di contatto tra i due anelli si crea un diamante. Il volume in cm^3 del più piccolo solido che contiene tutte le piramidi con vertici sui diamanti (cio è il più piccolo poliedro convesso che contiene tutti i diamanti) indicherà il numero di anni del dominio della Casa Lannister su Westeros. Quanti anni durerà tale dominio?

24. MORTE PER CASO**(PUNTI 70)**

MORTE controlla i destini dei personaggi con CASO. Davanti a MORTE ci sono due solchi circolari, uno lungo il doppio dell'altro. I due solchi sono collegati in un punto dove c'è uno scambio che permette di passare da un solco all'altro. Una pallagira a vela cita perfettamente costante nei solchi (impiega un minuto a completare il solco più corto). CASO, ogni volta che la palla sta per passare nel punto di collegamento, dice "sì" o "no"—a caso, appunto. . .

Se dice "sì", MORTE apre il collegamento in modo che la palla passi nell'altro solco. Se dice "no", non apre il collegamento e mantiene la palla nello stesso solco. Ogni volta che la palla giunge a metà del solco più lungo muore un personaggio. All'inizio della gara a squadre, la palla passa sul punto di mezzo del secondo solco (e muore un personaggio). Ci si chiede qual è la probabilità che, allo scoccare del quattordicesimo minuto di gara, muoia un personaggio. Se tale probabilità è p/q , con p e q primi tra loro, si fornisca come risposta il numero $q - p$.