Logo di Stefano Visciglia

CON IL PATROCINIO DELLA REGIONE PIEMONTE
DEL COMUNE DI TORINO
E
DELL’ASSOCIAZIONE SUBALPINA MATHESIS

GARA PER IL PUBBLICO

Sermig/Steiner – Venerdì 8 marzo 2019

OLIMPIADI DI MATEMATICA

Problema 1 – Dadi e numeri primi — 20 punti

Qual è la probabilità che lanciando due dadi identici a 6 facce, la differenza tra i due numeri in valore assoluto sia un numero primo?
Dare come risposta il valore ottenuto moltiplicando per 10000 la suddetta probabilità.

Soluzione:

Non tenendo conto di facce uguali (che darebbero differenza zero) abbiamo queste possibilità (da moltiplicare per due tenendo conto di un “primo” e di un “secondo” dado):

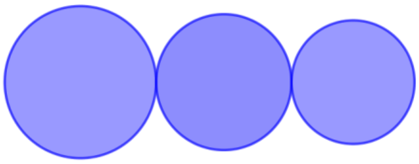
1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	Differenze assolute :	1	2	3	4	5
	2,3	2,4	2,5	2,6	“	1	2	3	4	
		3,4	3,5	3,6	“	1	2	3		
			4,5	4,6	“	1	2			
				5,6	“	1				

I numeri primi (non conta il numero uno) sono il 2, *il* 3 *e il* 5. *Ne abbiamo in totale otto in tabella, quindi sono* 16 *in tutto su* 36 *casi possibili.*

La probabilità richiesta è dunque $p = \frac{16}{36} = \frac{4}{9} = 0,\overline{4}$. **Risposta** $\boxed{4444}$

Problema 2 – Ruote tangenti **20 punti**

Le tre ruote in figura si toccano in un punto ed hanno ciascuna il diametro inferiore del 10% rispetto alla ruota precedente. Quando una delle ruote inizia a ruotare il movimento si trasmette anche alle altre ruote. Se la ruota più piccola compie 100 giri, quanti giri compie la ruota più grande?



Soluzione:

Il rapporto fra i diametri è uguale al rapporto fra le circonferenze delle ruote in questione.
Detta 100 *la circonferenza della prima ruota, quella della seconda sarà* 90 *e quella della terza sarà* 81.

Se la terza (la ruota più piccola) fa 100 *giri, la seconda ne farà* $\frac{81 \times 100}{90} = 90$ *e la prima (la più grande) ne farà* $\frac{90 \times 90}{100} = \frac{81 \times 100}{100} = 81$.

Risposta $\boxed{0081}$

Problema 3 – La "terza" età **25 punti**

Mio nipote ha lo stesso numero di giorni delle settimane di mia figlia e lo stesso numero di mesi dei miei anni. La somma delle nostre età è 120 anni. Quanti sono i miei mesi?

Soluzione:

Sia x l'età (in anni) di mio nipote, y quella di mia figlia e z la mia. Avremo:

$$\begin{cases} y = 7x \\ z = 12x \\ x + y + z = 120 \end{cases}, \text{ da cui } \begin{cases} y = 7x \\ z = 12x \\ x + 7x + 12x = 120 \end{cases}, \begin{cases} y = 7x \\ z = 12x \\ 20x = 120 \end{cases}, \begin{cases} y = 42 \\ z = 72 \\ x = 6 \end{cases}.$$

Quindi z = 72 ×12 *(mesi)* = 864 *(mesi).*

Risposta $\boxed{0864}$

Problema 4 – Gioco per studentini 30 punti

Durante interrogazioni di matematica due studenti (poco interessati ai colloqui) fanno questo gioco. Su un foglio a quadretti tracciano una pista automobilistica e cercano di vincere il Gran Premio. Il gioco si svolge così (vedi figura 1): a turno, a cominciare dalla linea di partenza/arrivo AB, in senso antiorario, tracciano dei segmenti formando una spezzata il cui ultimo tratto tocca/taglia il traguardo. Vince chi usa il minor numero di segmenti. Ogni tratto parte e arriva al vertice di un quadretto. Il primo tratto, a partire da P, ricalca il lato di un quadrettino. I successivi tratti vengono realizzati così: si considera il prolungamento del tratto; il suo estremo è il punto comune a quattro quadretti; si unisce l'ultimo punto individuato ad un vertice di uno dei suddetti quadretti (figura 2). Si riesce così ad "accelerare" e a "rallentare" o a proseguire con "velocità" costante. Non si può uscire di pista, pena squalifica, né sfiorarne il bordo: bisogna rimanere all'interno del percorso.
Qual è il numero minimo di segmenti, nella fattispecie, che consente di toccare/tagliare il traguardo?

Figura 1

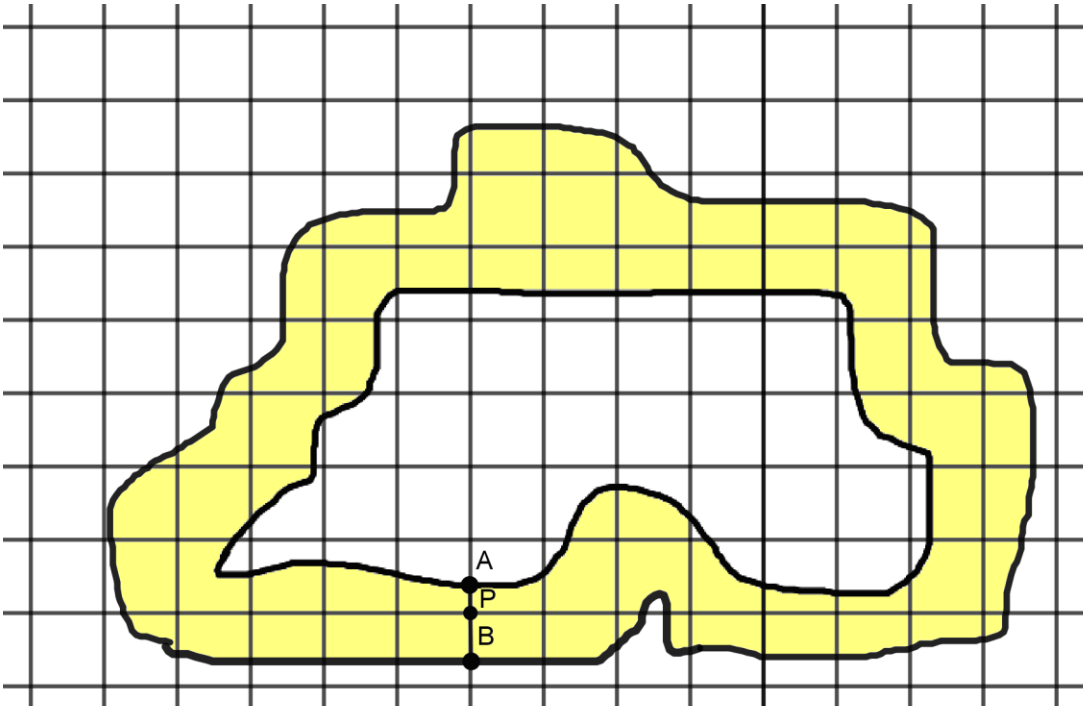
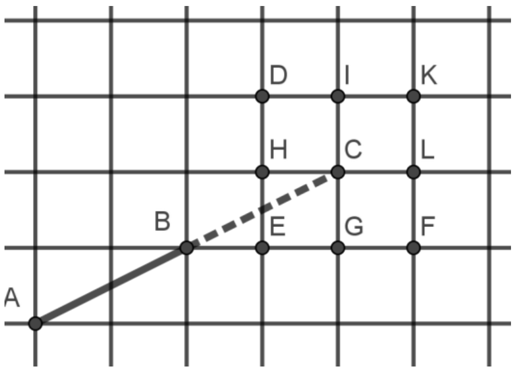
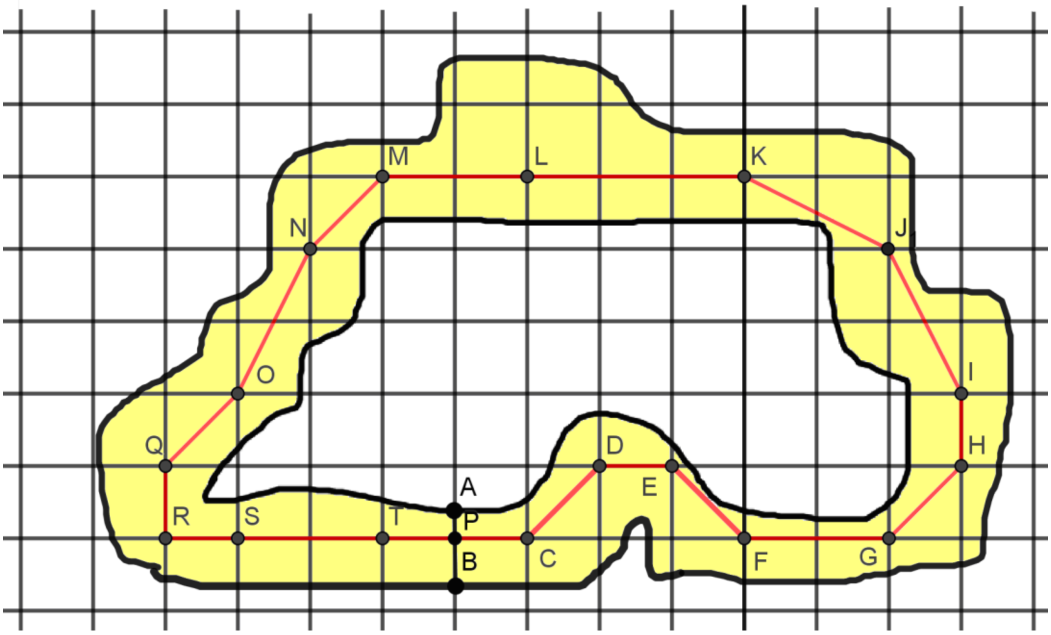


Figura 2



Sia, ad esempio, AB l'ultimo tratto. Da B si immagina di arrivare a C "ripetendo", sulla stessa direzione, l'ultimo segmento e si sceglie uno dei 9 punti (C, E, G, F, L, K, I, D, H) a cui congiungere B.

Soluzione:



Riferiamoci alla figura sopra.

Il primo tratto non può essere che PC. Proseguendo sulla stessa retta abbiamo due possibilità: congiungere C con D o C con E. La prima scelta va bene, la seconda porterebbe la spezzata fuori pista. Da E l'unica scelta proficua è quella di arrivare a F: "accelerare" porterebbe il tratto fuori dal tracciato. Acceleriamo verso G, poi vediamo che la scelta ottimale è H (decelerando). Non conviene accelerare successivamente, ma proseguire per I, allungando poi verso J. Da qui si hanno due possibilità: raggiungere K accelerando o proseguire in linea retta sulla diagonale di un quadretto. La figura rappresenta la prima ipotesi. La seconda via è equivalente alla prima perché porterebbe ad N con lo stesso numero di tratti, come si può facilmente verificare. Si prosegue come in figura utilizzando 18 *segmenti. Notiamo che da N si può arrivare ad O per due vie equivalenti. Il resto non cambia.*

Risposta $\boxed{0018}$

Problema 5 – Fatemi luce! 30 punti

Due candele della stessa altezza vengono accese contemporaneamente; la prima si consuma in 4 ore, la seconda in 5 ore. Supponendo che le candele si consumino in modo costante, dopo quanti minuti la seconda candela è alta il doppio della prima?

Soluzione:

Se indichiamo con 1 *l'altezza delle due candele e - con buona pace dei fisici…! - senza introdurre dimensioni, possiamo esprimere così le loro rispettive velocità di consumo:*

$$v_1 = \frac{1}{4} = 0{,}25 \ e \ v_2 = \frac{1}{5} = 0{,}20.$$

In un tempo t lo spazio percorso (= consumo) della prima candela sarà $s_1 = v_1 t$ *e la sua altezza risulterà uguale a* $1 - v_1 t$. *Contemporaneamente l'altezza della seconda candela sarà* $1 - v_2 t$. *La richiesta del quesito ci porta a creare l'equazione:*

$$1 - v_2 t = 2(1 - v_1 t).$$

Risolvendola si ha $t = \dfrac{1}{2v_1 - v_2} = \dfrac{1}{0{,}30} = \dfrac{10}{3} = 3{,}\overline{3}$.

Ritornando a tener conto delle dimensioni fisiche, otteniamo:

$$t = \frac{10}{3} \ ore = \frac{10}{3} \cdot 60 \, minuti = 200 \ minuti.$$

Risposta $\boxed{0200}$

Problema 6 – Scoppierà? 30 punti

Una sfera in rapida espansione raddoppia la sua superficie ogni secondo. Dopo quanti millesimi di secondo il suo volume sarà triplicato?

Soluzione:

Poiché una sfera di raggio r ha superficie $4\pi r^2$ *e volume* $\frac{4}{3}\pi r^3$ *Il rapporto fra volume e superficie di una sfera di raggio r è* $\frac{1}{3} r$.

Il volume è triplicato quando vale $4\pi r^3$, *con r = raggio iniziale. Il raggio R della sfera ingrandita sarà perciò R =* $r\sqrt[3]{3}$. *La superficie di questa sfera sarà quindi* $4\pi r^2 \cdot \sqrt[3]{9}$. *Dovrà essere:*

$$\frac{4\pi r^2 \cdot \sqrt[3]{9}}{4\pi r^2} = 2^t \textit{ (con t in secondi). Otteniamo: } 3^{\frac{2}{3}} = 2^t \textit{, da cui}$$

$$\frac{2}{3}\ln 3 = t \ln 2 \textit{, cioè } t = \frac{2\ln 3}{3\ln 2} = \frac{2}{3}\ln_2 3 \cong 1{,}05664.$$

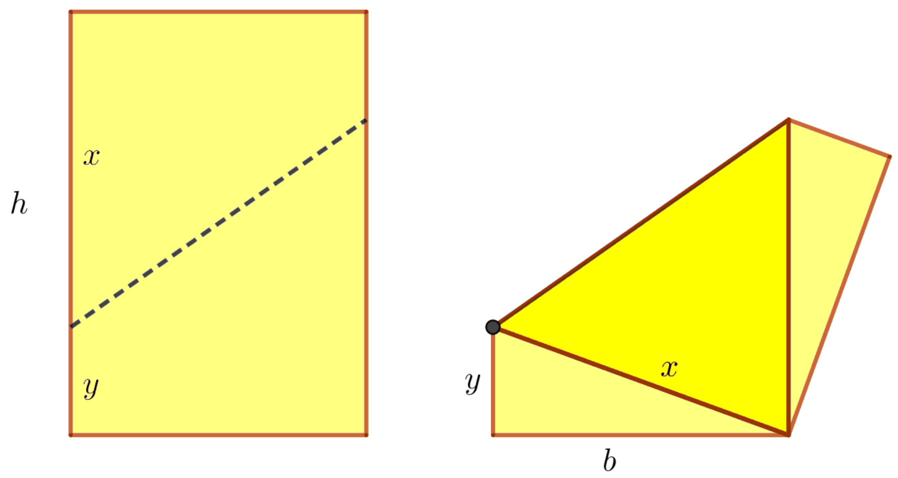
Risposta $\boxed{1056}$

Problema 7 – Un foglio piegato **35 punti**

Elisa prende un foglio rettangolare di base 35 *cm* e altezza 50 *cm* e lo piega in due in modo da far combaciare due vertici opposti. In questa maniera ciascuna altezza viene divisa in due parti. Quanti millimetri misura la differenza tra queste due parti?

Soluzione:

Chiamiamo x la maggiore delle due parti e y la minore. Vedi figura sotto.
Sappiamo che la somma delle due parti è l'altezza h. Inoltre, dopo aver effettuato le piega, le due parti formano l' ipotenusa e un cateto di un triangolo rettangolo che ha come secondo cateto la base b.



Dunque $h = x + y, \quad b^2 = x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$.

Perciò $x - y = \dfrac{b^2}{h} = \dfrac{35^2}{50}\,cm = 24{,}5\,cm = 245\,mm.$

Risposta $\boxed{0245}$

Problema 8 – Minikakuro **35 punti**

Regole (vedi schema sotto):

- In ciascuna casella chiara va inserita una cifra tra 1 e 9.
- Le "definizioni" riportate ai bordi sono le somme delle cifre che devono comparire sulle righe e sulle colonne.
- Per ciascuna "definizione" una cifra non può essere ripetuta.

					15
					30
					9
	14	7	16	10	

Compilare tutto lo schema dando come risposta il numero composto dalle quattro cifre nelle caselle evidenziate.

Soluzione:

La somma 16 *nella quarta colonna si può ottenere solo come* 7 + 9 *ed il* 9 *non può trovarsi nella terza riga.*

					15
			9		30
			7		9
	14	7	16	10	

Nella casella della prima riga e terza colonna ci deve essere al massimo 15 – 9 = 6 *(somma sulla riga), ma almeno* 7 – 1 = 6 *(somma sulla colonna).*

		6			15
			9		30
			7		9
	14	7	16	10	

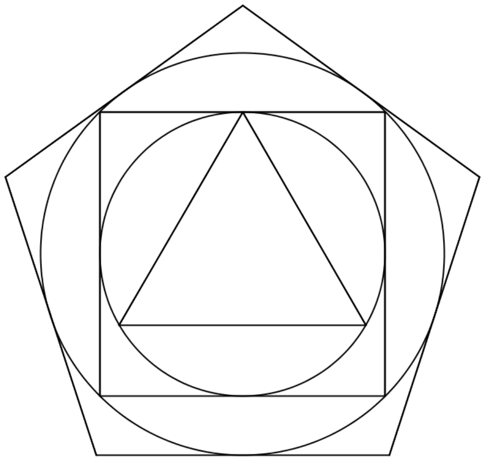
E' ora possibile completare lo schema:

	9	6			15
7	5	1	9	8	30
			7	2	9
	14	7	16	10	

Risposta $\boxed{7519}$

Problema 9 – Puzzle poligonale 35 punti

Partendo da un triangolo equilatero, tracciamo la circonferenza ad esso circoscritta; ora circoscriviamo a questa circonferenza un quadrato, e al quadrato circoscriviamo un'altra circonferenza; a questa nuova circonferenza circoscriviamo un pentagono regolare, e così via. Ripetiamo questa costruzione, con nuove circonferenze e nuovi poligoni regolari (ognuno avente un lato in più del precedente) fino a tracciare il poligono regolare di 100 lati. In quante regioni disgiunte risulta suddiviso questo particolare puzzle?

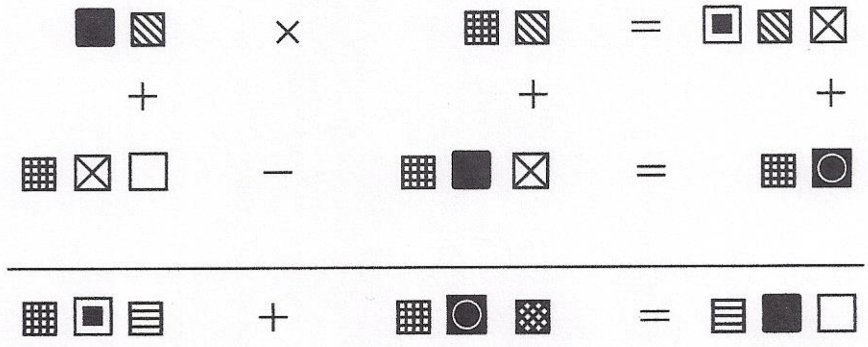


Soluzione :

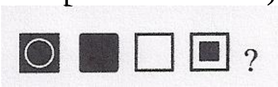
Il triangolo individua una regione; tracciando la circonferenza ad esso circoscritta si individuano altre 3 *regioni; con il quadrato altre* 4 *regioni; con la circonferenza circoscritta al quadrato altre* 4 *regioni: con il pentagono altre* 5 *regioni e così via. In totale si hanno* 1+3+4+4+5+5+6+6+… +99+99+100 *regioni. Considerando che* 4+5+6+…+99 = (4+99)·(96/2) = 4944*, il numero di regioni è* 1+3+100+(2·4944) = 9992

Risposta $\boxed{9992}$

Problema 10 – Calcolo enigmatico 2019 40 punti

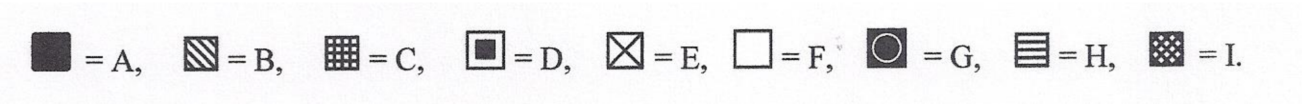


A segno uguale corrisponde cifra uguale (e a segno diverso cifra diversa).
La prima cifra non è mai lo zero (come semplicità comanda).

Quale numero corrisponde alla stringa 

Soluzione:

Sostituiamo lettere ai simboli in questo modo:



Otteniamo così:

$$\begin{array}{ccccc}
AB & \times & CB & = & DBE \\
+ & & + & & + \\
CEF & - & CAE & = & CG \\
\hline
CDH & + & CGI & = & HAF
\end{array}$$

Notiamo subito che manca una delle dieci cifre canoniche.
Si vede pure che è $A + E \le 9$ *(1^a somma verticale),* $H = 2C$ *oppure* $H = 2C + 1$ *con* $C \le 4$ *(somma orizzontale in basso),* $H = D + 1$ *(3^a somma verticale) e* $B + C \ge 9$*. Inoltre è* $E > A$ *(sottr. vert.).*
Infine B *deve essere diverso da* 0, 1, 5, 6 *(prodotto orizzontale).*
Studiamo i seguenti casi: a) $C = 4$*, b)* $C = 3$*, c)* $C = 2$*, d)* $C = 1$.
a) $C = 4 \rightarrow H = 8$ *oppure* $H = 9$.
Se $H = 8$ *abbiamo* $D = 7$, $B \ge 5$*. Se* $B = 7$ *(non può essere né* $B = 5$*, né* $B = 6$*, come detto sopra) allora* $E = 9 > D$*, impossibile poiché è* $D > E$ *(1^a somma verticale). Se* $B = 9$ *allora* $F = 9$ *(1^a s. v.): non va bene.*
Se $H = 9$ *abbiamo* $D = 8$, $B \ge 4$ *e concludiamo come sopra.*
b) $\mathbf{C = 3} \rightarrow H = 6$ *oppure* $H = 7$.
Se $H = 6$ *abbiamo* $D = 5$, $B \ge 6$*, quindi* B *vale* 7 *o* 8 *o* 9*. Abbiamo le implicazioni:* $B = 7 \rightarrow F = 9$ *(1^a s. v.), ma anche* $E = 9$ *(3^a s. v.): non va bene.* $B = 8 \rightarrow F = 8$*, non va bene ancora.* $B = 9 \rightarrow F = 7$, $E = 1$ *(prodotto orizzontale),* $I = 0$ *(2^a s. v.), da cui* $F = 6$ *(somma orizzontale in basso): contraddizione.*
Se $\mathbf{H = 7}$ *abbiamo* $\mathbf{D = 6}$, B *vale* 8 *o* 9*. Abbiamo le implicazioni:* $\mathbf{B = 8 \rightarrow F = 9, A = 1}$ *(3^a s. v.),* $\mathbf{E = 4}$ *(1^a s. v.),* $\mathbf{I = 2}$, $\mathbf{G = 5}$ *(2^a e 3^a s. v.). Soluzione trovata. Essa è unica come si può verificare.*
Infatti se fosse $B = 9$ *avremmo* $F = 8$, $A = 2$ *(3^a s. v.),* $E = 3 = C$*, non accettabile.*
c) $C = 2 \rightarrow H = 4$ *o* $H = 5$.
Se $H = 4$ *abbiamo* $D = 3$, $B + F = 14$ *(1^a s. v.),* $A + E < 3$*: impossibile.*
Se $H = 5$ *abbiamo* $D = 4 \rightarrow A + E = 1 + 2$*, caso impossibile (poiché è già* $C = 2$*), oppure* $A + E = 1 + 3$*, da cui* $B + F = 5$*, cioè* $B + F = 1 + 4$*, impossibile, oppure* $B + F = 2 + 3$*, altrettanto impossibile.*
d) $C = 1 \rightarrow H = 2$ *o* $H = 3$.
Se $H = 2$ *abbiamo* $D = 1 = C$*: non accettabile.*
Se $H = 3$ *abbiamo* $D = 2$*, da cui* $E > 2$*: impossibile (1^a s. v.).*
La soluzione è data quindi dal caso b).

Risposta $\boxed{5196}$

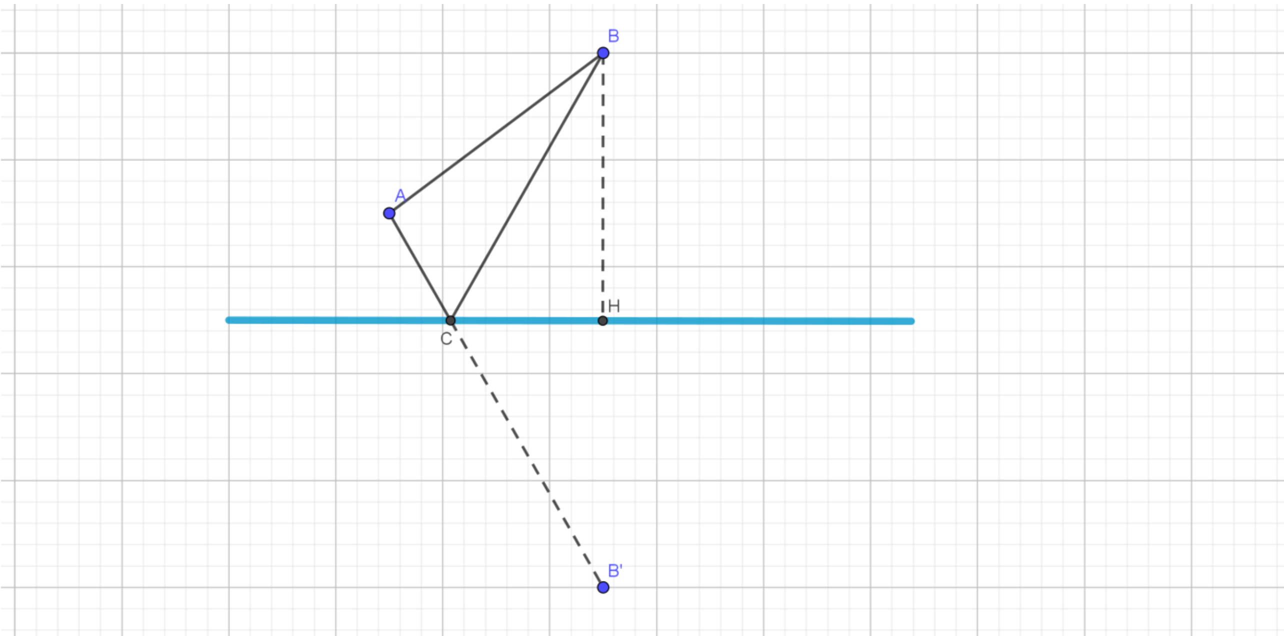
Problema 11 – L'incendio 40 punti

Un terribile incendio si è sviluppato presso una fabbrica. Un velivolo Canadair dei corpi antincendio si alza in volo dalla sua base, posta a 50 *km* di distanza dalla fabbrica, per raggiungere l'incendio e spegnerne le fiamme. La fabbrica e la base dei pompieri distano rispettivamente 50 *km* e 20 *km* dal litorale marino che in tale tratto presenta un profilo rettilineo. Sapendo che l'aereo decolla dalla base con il serbatoio d'acqua completamente vuoto, che il mare costituisce l'unica fonte di approvvigionamento idrico e che per spegnere l'incendio sono necessari due carichi completi del serbatoio, quanto misura la minima distanza (in *km*) che esso dovrà percorrere per portare a termine la sua missione e rientrare alla base?

Soluzione :

Si faccia riferimento alla figura seguente e si indichi con il punto A *la base di decollo del Canadair e con il punto* B *il luogo dell'incendio (intersezione fra la retta parallela al litorale distante* 50 *km da esso e la circonferenza di centro* A *e raggio* 50 *km).*
Il percorso di minima distanza fra A *e* B *che tocchi il litorale coincide con la spezzata* ACB*, dove* C *è il punto di intersezione fra il litorale e la retta* AB' *con* B' *simmetrico di* B *rispetto al litorale.*
Pertanto il velivolo per effettuare il primo rifornimento d'acqua (in C*), raggiungere l'incendio ed eseguire il primo svuotamento (in* B*) seguirà tale spezzata. Successivamente esso compirà il tragitto andata e ritorno fra* B *e il litorale lungo la perpendicolare alla costa passante per* B *ed infine rientrerà alla base* A *lungo il segmento* BA.
La lunghezza totale del tragitto risulta dunque:

$$\overline{AC}+\overline{CB}+\overline{BH}+\overline{HB}+\overline{BA}=\overline{AB'}+2\overline{BH}+\overline{BA}=(\sqrt{40^2+70^2}+2\cdot 50+50)km \cong 230{,}6\ \ km.$$



Risposta **0230**

Problema 12 – Un compleanno smemorato 45 punti

Il giorno di Natale, chiacchierando con i suoi amici del centro anziani il signor Arturo afferma che l'anno successivo festeggerà 90 anni, però ha già qualche problema di memoria e quindi non si ricorda più esattamente il giorno del suo compleanno. I suoi amici Renato, Mauro, Giorgio, Paolo ed Enrico provano ad aiutarlo:

- secondo Renato il compleanno dell'amico Arturo sarà sabato 15 maggio;
- secondo Mauro sarà domenica 15 maggio;
- secondo Giorgio sarà domenica 5 giugno;
- secondo Paolo sarà sabato 5 maggio;
- secondo Enrico sarà sabato 5 giugno.

Sapendo che l'anno in questione non è bisestile e che uno solo dei cinque amici ha ragione ma nessuno di essi ha completamente torto (cioè ciascuno si ricordava correttamente almeno un elemento: o il giorno della settimana o il giorno del mese o il mese), quanti giorni dovrà ancora attendere Arturo prima di spegnere le sue 90 candeline?

Soluzione :

Se avesse ragione Renato allora Giorgio avrebbe completamente torto, fatto contrario all'ipotesi.
Se invece avesse ragione Mauro allora Enrico avrebbe completamente torto, mentre se avesse ragione Giorgio allora Renato non avrebbe ricordato correttamente né il giorno né la data né il mese e se avesse ragione Enrico allora Mauro avrebbe completamente torto.
L'unica opzione corretta è quella secondo cui ad aver ragione è il signor Paolo, perché in tal caso Renato avrebbe ben ricordato il giorno e il mese, Mauro il mese, Giorgio il numero 5 *ed Enrico il giorno e la data.*
Pertanto il compleanno di Arturo sarà il 5 *maggio e quindi, partendo dal giorno* 25 *dicembre dell'anno precedente, si dovranno ancora attendere esattamente* 131 *giorni.*

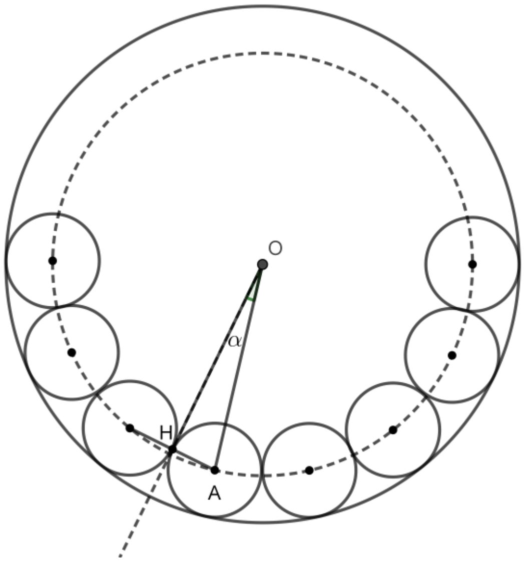
Risposta $\boxed{0131}$

Problema 13 – Pastelli a cera 50 punti

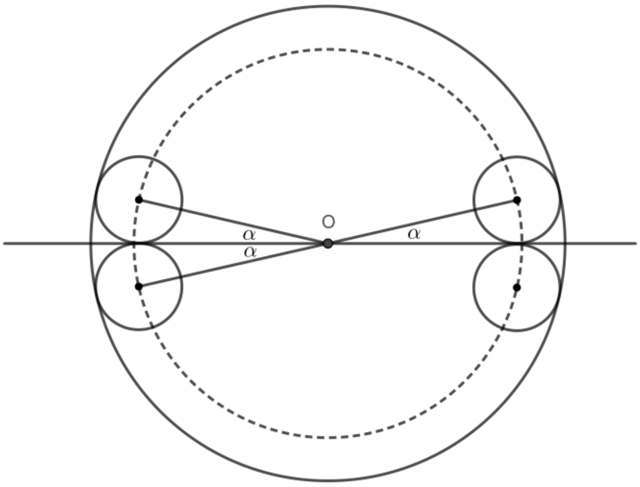
Antonio ha avuto in regalo una scatola di pastelli a cera. Il contenitore è a forma di cilindro con diametro di base 9 *cm*. I pastelli sono pure cilindrici con diametro di base 1 *cm*. Antonio svuota la scatola, l'appoggia sulla sua scrivania in modo che la superficie laterale del cilindro sia tangente al piano di scrittura. Infine Antonio inserisce uno ad uno i pastelli nella scatola, tangenti al bordo e in sequenza fra di loro, per scoprire quanti pastelli riesce ad introdurre prima che qualcuno cada in basso. Supponendo l'indeformabilità degli oggetti, nulli gli attriti ed accettando anche casi di equilibrio instabile, calcolare quanti pastelli al massimo Antonio riesce a sistemare nel contenitore nel modo da lui voluto.

Soluzione:

Facciamo riferimento alla figura qui sotto (esempio in cui il diametro della scatola è 11 *"unità di misura" e il diametro dei pastelli è* 2 *"unità")*



In figura OH *è tangente al pastello,* OA *congiunge il centro* O *della scatola col centro di un pastello e* AH *è un raggio del pastello. Chiamiamo α l'ampiezza dell'angolo* $\mathrm{A\hat{O}H}$.
E' facile convincersi che, per ottenere l'equilibrio voluto, dovrà essere $2\alpha(n-1) \le 180°$, *dove n è il massimo numero di pastelli (vedi figura sotto, nella quale si presenta un caso limite max con equilibrio instabile).*



Nel nostro caso è $\sin\alpha = \frac{\overline{\mathrm{HA}}}{\overline{\mathrm{OA}}} = \frac{1}{9-1} = \frac{1}{8} = 0{,}125$, *da cui* $\alpha = \arcsin 0{,}125 = 7{,}180755782\ ...°$.

Abbiamo quindi $n \le \frac{90°}{\alpha} + 1 = 13{,}53349964...$, *cioè n* = 13.

Risposta **0013**

Problema 14 – Caso 2019 per l’ispettore di M. Smullyan 50 punti

In un caso di furto sono coinvolti quattro imputati, A, B, C, D. Vengono accertati i seguenti quattro fatti:

1) Se A e B sono entrambi innocenti, allora C è colpevole.
2) Se D è colpevole, almeno uno, tra A e C, è stato suo complice.
3) Se C è innocente, allora B è colpevole.
4) Se almeno uno fra B e D è colpevole, allora A è innocente.

Alla luce dei suddetti fatti, calcolare la probabilità P(A) che A sia colpevole.
Si ipotizzi l’equiprobabilità degli eventi elementari che verranno individuati.
Dare come risposta la parte intera di 1000 × P(A).

Soluzione:

Formalizziamo dapprima le frasi.
Si intenda A = “A è colpevole” , ecc. 0 = FALSO
$\neg$ A = “A è innocente”, ecc. 1 = VERO
Avremo:

1) $[(\neg A) \wedge (\neg B)] \rightarrow C$
2) $D \rightarrow (A \vee C)$
3) $\neg C \rightarrow B$
4) $(B \vee D) \rightarrow \neg A$

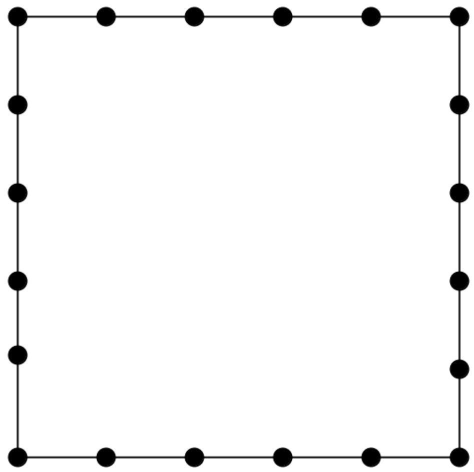
Costruiamo la tavola di verità:

									1		2	3		4
	A	**B**	**C**	**D**	**nA**	**nB**	**nC**	**nA∧nB**	**(nA∧nB)⇒C**	**A∨C**	**D⇒(A∨C)**	**nC⇒B**	**B∨D**	**(B∨D)⇒nA**
1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1
2	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1
3	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1
4	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
5	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1
6	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1
7	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1
10	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0
11	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1
12	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0
13	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0
14	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0
15	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0
16	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0

Poiché i fatti (1), (2), (3), (4) *sono stati accertati (quindi supposti veramente accaduti), considerando quindi solo le righe (in rosso su sfondo giallo) della tabella corrispondenti alle situazioni in cui tutte le* 4 *frasi hanno valore di verità* 1, *si nota che, nei riguardi di* A, *si ha* 1 *caso “*1*” su* 6 *complessivi (considerati “equiprobabili”, date le nostre informazioni). La probabilità cercata è quindi* P(A) = 1/6 = $0{,}1\overline{6}$ *, da cui* 1000 × P(A) = 166,666… . **Risposta** $\boxed{0166}$

Problema 15 – Astrattismo matematico 50 punti

L’insegnante di arte chiede alla classe di creare un quadro astratto. Pablo decide di costruirlo tracciando tutti i quadrilateri convessi non degeneri ottenuti unendo i punti del quadrato in figura. Da quanti di questi quadrilateri (compreso il quadrato iniziale) è costituita la sua opera?



Soluzione :

Nel quadrato ci sono 20 *punti distinti, che possono essere scelti come vertici dei quadrilateri. Utilizzando le combinazioni semplici si ottiene che sono possibili* $C_{20,4} = 20! / (16! \cdot 4!) = 4845$ *quadrilateri convessi, tra cui quelli degeneri. Esistono due tipologie di quadrilateri degeneri: quelli che hanno tutti e* 4 *i vertici sullo stesso lato (che sono* $4 \cdot C_{6,4} = 4 \cdot 15 = 60$*) e quelli che hanno* 3 *vertici su un lato ed il* 4° *vertice su un altro lato (che sono* $4 \cdot C_{6,3} \cdot 14 = 4 \cdot 20 \cdot 14 = 1120$*). I quadrilateri non degeneri sono dunque* $4845 - 60 - 1120 = 3665$.

Risposta $\boxed{3665}$

Problema 16 – Catena di Sant’Antonio 2019 55 punti

Il sistema di posta elettronica di un’azienda si è guastato: qualunque e-mail inviata ad un dipendente viene ricevuta da uno a caso dei 2019 dipendenti.
Per fortuna tutti i dipendenti sono premurosi e, quando ricevono una mail destinata a qualcun altro, si premurano di inoltrargliela, usando però la stessa posta elettronica guasta: può così capitare che una mail venga inoltrata più volte prima di raggiungere il destinatario.
Il sistema di posta elettronica ricorda però i mittenti e non invia mai una mail a qualcuno che l’ha già ricevuta (e inoltrata).
Mandando una mail ad un dipendente, in media, quante mail verranno inviate?

Soluzione:

Siccome il sistema ricorda i mittenti, la mail raggiungerà il destinatario dopo al massimo 2019 *passaggi.*

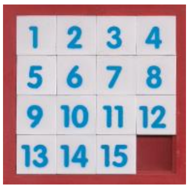
Supponiamo che i dipendenti continuino ad inoltrare la mail senza leggere il nome del destinatario; dopo esattamente 2019 *passaggi la mail verrà ricevuta da tutti, compreso il destinatario che si troverà in una posizione a caso della catena.*
In media il numero di dipendenti raggiunti dalla mail è

$$\frac{1+2+3+...+2019}{2019}=\frac{2019\cdot 2020}{2}:2019=\frac{2020}{2}=1010.$$

Risposta $\boxed{1010}$

Problema 17 – Il gioco del 15 (15-puzzle) 60 punti

Abbiamo una scacchiera 4×4 con 15 caselle quadrate mobili numerate da 1 a 15 e con uno spazio vuoto per permettere il movimento delle caselle stesse (vedi figura) in orizzontale o in verticale.



Scopo del gioco è quello di realizzare l'ordinamento dei numeri come in figura, da una situazione disordinata delle cifre.
Pierino è riuscito ad ottenere la seguente configurazione:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
15	13	14	

Qual è il numero minimo delle mosse che Pierino dovrà compiere per ottenere la configurazione esatta? Per "mossa" si intende lo scorrimento orizzontale o verticale di una o più caselle contemporaneamente.

Soluzione:

Ecco la sequenza "minima" delle mosse che Pierino deve compiere (dalla mossa 2 si sono tralasciate in figura le prime otto caselle poiché restano invariate):

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
15	13	14	

Inizio

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
	15	13	14

Mossa 1

	10	11	12
9	15	13	14

Mossa 2

10		11	12
9	15	13	14

Mossa 3

10	15	11	12
9		13	14

Mossa 4

10	15	11	12
9	13	14	

Mossa 5

10	15	11	
9	13	14	12

Mossa 6

	10	15	11
9	13	14	12

Mossa 7

9	10	15	11
	13	14	12

Mossa 8

9	10	15	11
13	14		12

Mossa 9

9	10		11
13	14	15	12

Mossa 10

9	10	11	
13	14	15	12

Mossa 11

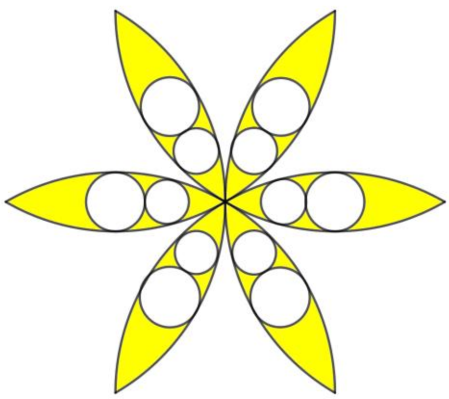
9	10	11	12
13	14	15	

Mossa 12

<u>Osservazione</u>. I numeri 13, 14, 15 *devono essere in ordine "circolare", altrimenti non si può ottenere la conformazione finale voluta.* **Risposta** $\boxed{0012}$

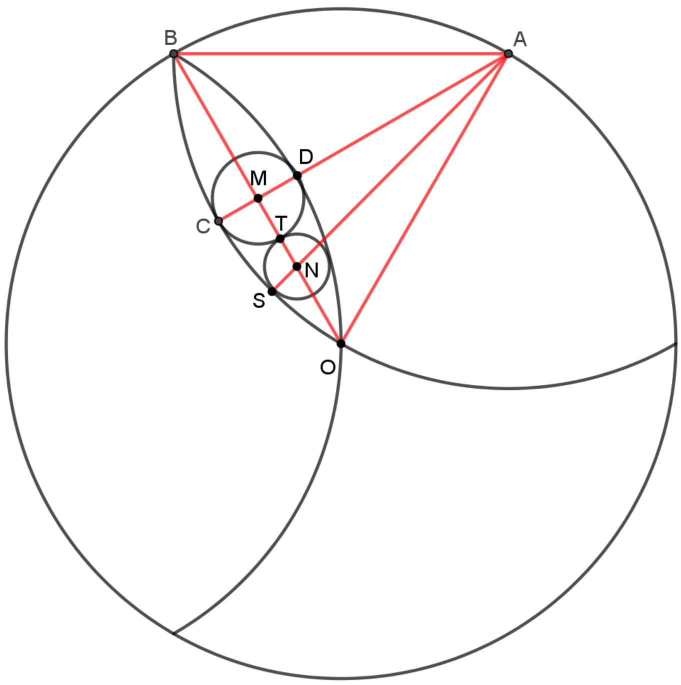
Problema 18 – 8 marzo: Festa della Donna **65 punti**

Valentino decide di regalare un gioiello alla fidanzata per l'8 marzo. Non badando a spese lo fa realizzare in oro, a forma di margherita (a Valentino non piacciono le mimose…), con brillanti (autentici…?) incastonati come in figura. Ha sei petali (in oro) disegnati con archi di circonferenza, di raggio 2 *cm*, su ognuno dei quali sono fissati due brillanti: uno centrale più grande e uno più piccolo verso il centro del gioiello. Considerando per i diamanti una forma circolare, essi sono tangenti fra loro e ai bordi del petalo.
Calcolare il raggio di uno dei brillanti più piccoli. Dare come risposta il numero formato dalle prime 4 cifre decimali del valore del raggio in *cm*.



Soluzione:

Riferiamoci alla figura seguente.



Detta r la lunghezza del raggio delle circonferenze generatrici, abbiamo:

$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AS} = r$, *nonché* $A\hat{O}B = 60°$.

Detto M *il punto medio di* OB, *otteniamo* $\overline{BM} = \overline{MO} = \frac{r}{2}$ *e* $\overline{AM} = \frac{r}{2}\sqrt{3}$.

Ricaviamo $\overline{CM} = \overline{MD} = r - \frac{r}{2}\sqrt{3} = \frac{2-\sqrt{3}}{2} r$.

Posto $\overline{SN} = \overline{NT} = x = r - \overline{AN}$, *poiché* $\overline{AN} = \sqrt{\overline{MA}^2 + \overline{MN}^2}$ *si ha*

$$\sqrt{\frac{3}{4}r^2 + \left(x + \frac{2-\sqrt{3}}{2}r\right)^2} = r - x .$$

Semplificando otteniamo (con r > x) $x = \frac{5\sqrt{3}-6}{26} r \cong 0{,}102317463 r$.

Poiché è $r = 2$ *cm, si ha* $x \cong 0{,}204634926$ *cm.*

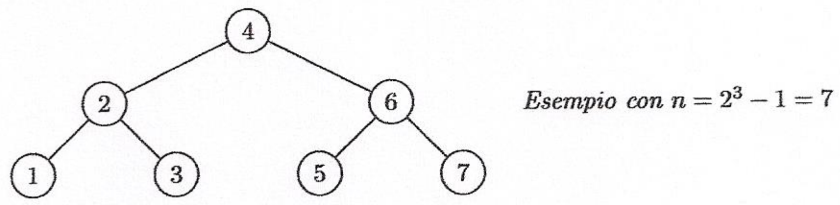
Risposta $\boxed{2046}$

Problema 19 – Strategie ottimali **65 punti**

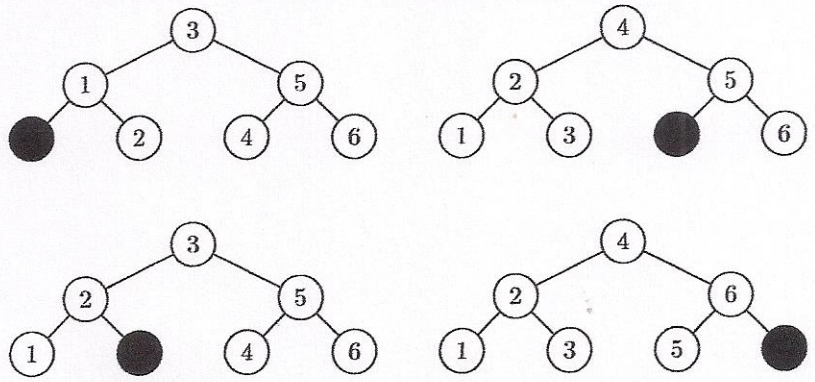
Alberto e Sofia giocano a *Indovina il numero*: Sofia pensa un numero intero compreso fra 1 e 1022 e Alberto ne sceglie uno, cercando di indovinare quello pensato da Sofia. Ad ogni tentativo Sofia risponde *esatto* oppure *troppo piccolo* oppure *troppo grande*.
Alberto, il quale si diletta di matematica, sa che, se il numero venisse scelto tra 1 e 1023, esso avrebbe una (ed una sola) strategia ottimale che gli permetterebbe di indovinare il numero con un massimo di 10 tentativi.
In questo caso, però, Alberto ha più di una strategia ottimale. Quante sono in tutto?

Soluzione:

Con ogni tentativo Alberto elimina un numero e divide i rimanenti in due blocchi: nella peggiore delle ipotesi gli rimane il blocco più numeroso.
Se il numero fosse il precedente di una potenza di due (cioè della forma $n = 2^k - 1$*, come* $1023 = 2^{10} - 1$*) Alberto potrebbe sempre scegliere ogni volta il numero "centrale" rimanendo con due blocchi di* $2^{k-1} - 1$ *numeri ciascuno e indovinando così in al massimo k tentativi. I numeri che può provare in totale sono* 2^{k-1} *(*512 *se parte con* 1023 *numeri).*



Siccome Sofia usa un numero in meno ($n = 2^k - 2$*), Alberto può iniziare con uno dei due numeri "centrali" (*511 *e* 512*), che dividono i rimanenti in un blocco da* $2^{k-1} - 1$ *(per il quale c'è un'unica strategia) e uno da* $2^{k-1} - 2$ *(per il quale Alberto ha di nuovo una scelta tra due numeri "centrali").*
Continuando in questa maniera, Alberto ogni volta sceglie da che parte lasciare il numero mancante: se nel blocco dei numeri più grandi o in quello dei numeri più piccoli.



Siccome il numero "mancante" occuperà uno dei 512 *tentativi finali, le strategie ottimali di Alberto sono* 512 *(che sono la metà più* 1 *di* 1022*, come si sarebbe potuto congetturare).*

Risposta **0512**

Problema 20 – Cin cin! 80 punti

Un bicchiere a forma di prisma a base quadrata contiene del whisky. Il lato di base misura 4 *cm*, l'altezza del bicchiere misura 7 *cm* e il livello del liquore si trova a 3 *cm* dal fondo. Claudio ruota il bicchiere in senso antiorario appoggiandolo su uno spigolo di base, cercando una soluzione di equilibrio (instabile). Qual è l'angolo (in gradi, tralasciando primi e secondi) per il quale il liquido viene suddiviso in due volumi uguali dal piano verticale passante per il suddetto spigolo? Si ipotizzino trascurabili la massa del bicchiere ed il suo spessore.

Soluzione

Per questioni di simmetria basta considerare una faccia del prisma ed uno spigolo del rettangolo che ne consegue. Vedi figure sotto.

Fig. 1

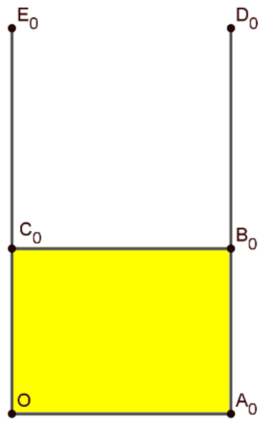
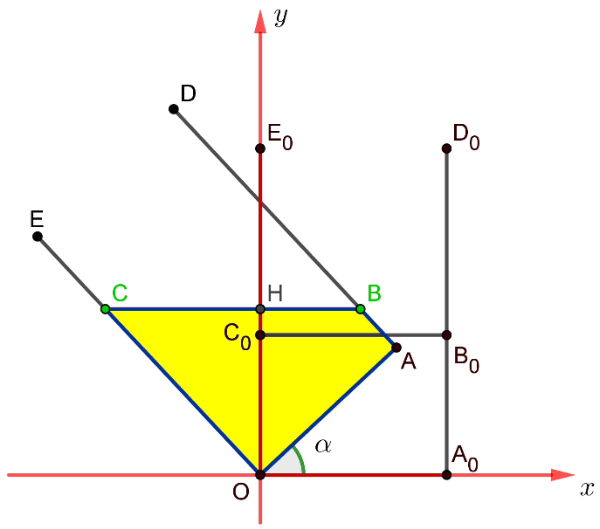


Fig. 2



Riferiamoci alla fig. 2 *che riassume il tutto. L'unità di misura è il centimetro.*

Posto $A_0\hat{O}A = \alpha$ *l'angolo richiesto (con* $0° < \alpha < 90°$*) e richiamandoci ad un riferimento cartesiano xOy in cui* A_0 *si trova sull'asse x ed ha ascissa* 4, *otteniamo subito* $A(4\cos\alpha, 4\sin\alpha)$.

Imponendo che l'area di OABC *valga* 12 *si ricava* $\overline{CO} = 2\tan\alpha + 3$, *da cui* $x_C = -\sin\alpha(2\tan\alpha + 3) = \dfrac{-2\sin^2\alpha - 3\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha}$, $y_C = \overline{CO}\cos\alpha = 2\sin\alpha + 3\cos\alpha$.

Poiché OBCA *viene diviso in due parti equiestese dal segmento* OH, *imponiamo che l'area di* COH *valga* 6. *Otteniamo così:*

$|x_C| \cdot y_C = 12$ *, da cui (essendo negativa l'ascissa di* C*)*

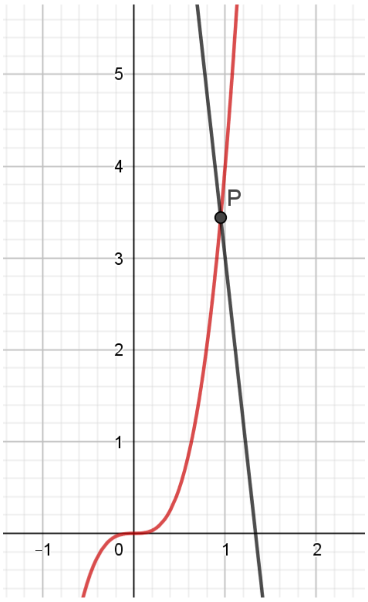
$$\sin\alpha(2\sin\alpha + 3\cos\alpha) \cdot \frac{2\sin\alpha + 3\cos\alpha}{\cos\alpha} = 12 .$$

Semplificando (e tenendo in considerazione le ipotesi su α) otteniamo:

$$4\tan^3\alpha + 9\tan\alpha - 12 = 0 ,$$

la quale è un'equazione di terzo grado, quindi, utilizzando ad esempio tecniche di analisi numerica, possiamo immaginare di individuare gli zeri della funzione $y = 4x^3 + 9x - 12 = f(x)$ *o le ascisse dei punti di intersezione dei grafici delle funzioni* $y = 4x^3 = f_1(x)$ *e* $y = -9x + 12 = f_2(x)$.

Dal seguente grafico otteniamo che l'ascissa del punto (unico) P di intersezione dei grafici di $f_1(x)$ *e di* $f_2(x)$ *è compresa fra* 0,9 e 1.



Abbiamo infatti

f(0,9) = −0,984 < 0, f(1) = 1 > 0, nonché $\arctan(0{,}9) \cong 41{,}98721°$ e $\arctan 1 = 45°$.

Ancora (metodo di bisezione):

$$f\left(\frac{0{,}9+1}{2}\right) = f(0{,}95) = -0{,}0205 < 0, \textit{ nonché } \arctan(0{,}95) \cong 43{,}531199°,$$
$$f\left(\frac{0{,}95+1}{2}\right) = f(0{,}975) = 0{,}4824375 > 0, \textit{ nonché } \arctan(0{,}975) \cong 44{,}2747°,$$
$$f\left(\frac{0{,}975+0{,}95}{2}\right) = f(0{,}9625) = 0{,}22916... > 0, \textit{ nonché } \arctan(0{,}9625) \cong 43{,}9053°.$$

La soluzione è quindi (utilizzando solo gradi in numero intero, come richiesto) $\alpha = 43°$.
Una seconda via per ottenere la soluzione è quella di risolvere direttamente l'equazione di terzo grado (formula di Scipione Dal Ferro) scritta così:

$$z^3 + \frac{9}{4}z - 3 = 0 \quad (z = \tan\alpha).$$

Posto $p = \frac{9}{4}$ *e* $q = -3$ *si ha (unica soluzione reale)*

$$z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{27}{64}}} + \sqrt[3]{\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{27}{64}}} \cong 0{,}951.$$

Anche qui otteniamo $\arctan(0{,}951) \cong 43{,}5623°$, *quindi abbiamo la stessa conclusione.*

Si osservi che la situazione descritta (e richiesta), con i dati forniti, fa sì che il whisky non esca dal bicchiere.

Risposta $\boxed{0043}$