Festa della Matematica

GARA DI MATEMATICA PER IL PUBBLICO
21.esima edizione
PalaRuffini Torino

Venerdì 1° marzo 2024

Problema 1 – Capodanno 2023 — 25 punti

Manca poco a mezzanotte, l'anno vecchio (2023) sta per diventare il nuovo anno (2024) ed in TV compare la scritta in sovraimpressione 2023^{2024}.

Michele, il matematico, vorrebbe calcolare il risultato di questa operazione, ma mancano pochi secondi al brindisi e si limita a scrivere sul foglio l'ultima cifra, ovvero la cifra delle unità. Quale cifra ha scritto Michele?

Soluzione:

Poiché 2024 *è un multiplo di* 4 *e* $3^4 = 81$ *termina appunto con la cifra* 1, *la cifra delle unità richiesta sarà proprio* 1.

Risposta $\boxed{0001}$

Problema 2 – Palline numerate — 25 punti

Luigino mette 11 palline in un'urna e scrive su ogni pallina un numero diverso tra 7 e 17; ne estrae a caso qualcuna e scrive alla lavagna il numero 360360. Poi si gira e dice: "Questo è il prodotto dei numeri delle palline che ho estratto. Mi sapete dire la somma dei numeri delle palline che sono ancora nell'urna?"

Soluzione:

Il numero 360360 *è divisibile per* 11, 12, 13, 14 ,15 *ed è uguale esattamente al loro prodotto. Restano nell'urna i numeri* 7, 8, 9, 10, 16, 17, *la cui somma vale* 67.

Risposta $\boxed{0067}$

Problema 3 – Palline in cestini **30 punti**

Due contenitori, A e B, ospitano ciascuno 10 palline sferiche della stessa dimensione. Le sferette in A sono rosse e quelle in B sono verdi. Scegliamo 5 palline in A e le depositiamo nel contenitore B. Poi inversamente prendiamo a caso 5 palline in B e le depositiamo in A.
Ripetiamo le operazioni per 6 volte.
Ci chiediamo: qual è la PROBABILITA' P che ci siano tante palline verdi in A quante rosse in B?

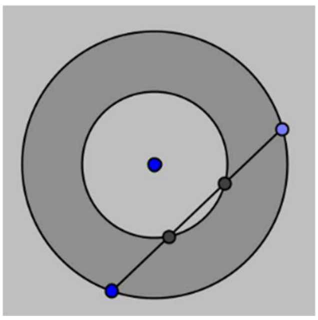
Dare come risposta la parte intera di 1000P.

Soluzione:

Ci sono tante verdi in A *quante rosse in* B, *infatti nelle due urne c'è uno stesso numero di palline (*10*): quindi le verdi che sono in* A, *ad es., pareggiano le rosse in* B. *Analogamente per le rosse. In definitiva* P = 1.

Risposta $\boxed{1000}$

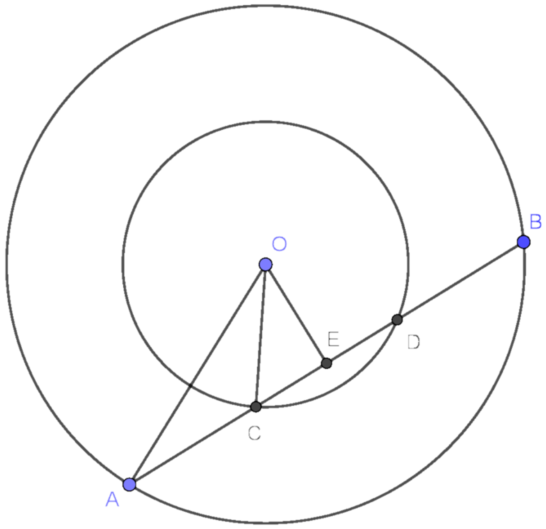
Problema 4 – Corona circolare **35 punti**



I punti evidenziati sul segmento, che è lungo 6, sono tutti equidistanti. Quanto vale, in multipli di π, l'area tra le due circonferenze concentriche?

Soluzione:

*Ognuna delle tre parti (*AC, CD *e* DB*) in cui è suddiviso il segmento* AB *misura* 2*. Vedi figura sotto.*



OA *è il raggio della circonferenza esterna e* OC *quello della circonferenza interna. Tracciamo da* O *il segmento perpendicolare a* CD *in* E. E *risulta essere il punto medio di* CD*. La lunghezza di* AE *è quindi* 3*. Considerando opportuni triangoli rettangoli otteniamo quindi:*

$\overline{OA}^2 - \overline{OE}^2 = 9$ *e* $\overline{OC}^2 - \overline{OE}^2 = 1$, *da cui* $\overline{OA}^2 - \overline{OC}^2 = 8$, *che è la soluzione del quesito.*

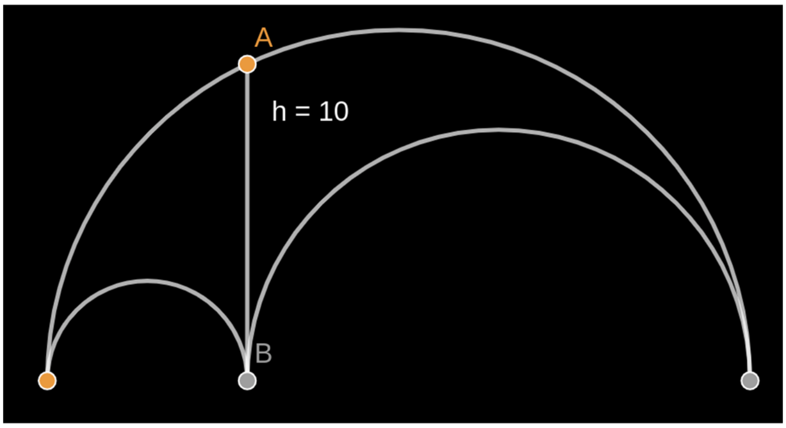
Infatti l'area della circonferenza maggiore vale $\pi\overline{OA}^2$ *e quella della circonferenza minore vale* $\pi\overline{OC}^2$.

Risposta $\boxed{0008}$

Problema 5 – Oh che bel castello! 35 punti

Per entrare nel castello si deve passare sotto uno dei due archi a tutto sesto consecutivi, entrambi sormontati da un grandissimo arco che li contiene entrambi.

Se volessi pitturare la superficie tra i tre archi, sapendo che l'altezza h dell'arco grande sopra il punto tra le due porte è 10 *m*, quante latte di colore servirebbero come minimo (ogni latta di colore basta per π *m*², ovvero pi-greco metri quadri)?



Soluzione:

Detto R il raggio della circonferenza maggiore, r_1 e r_2 i raggi dei cerchi minori, otteniamo

$R = r_1 + r_2$.

Considerando il triangolo rettangolo inscritto nella semicirconferenza maggiore, con ipotenusa su diametro e altezza ad essa relativa AB *(di lunghezza h come da figura), otteniamo* $2r_1 \times 2r_2 = 100$, *da cui* $r_1 \times r_2 = 25$.

Abbiamo $R^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2$, *da cui* $R^2 - r_1^2 - r_2^2 = 50$.

Il primo membro dell'uguaglianza, moltiplicato per π, darebbe l'area del cerchio maggiore meno l'area dei due cerchi minori, quindi il doppio dell'area della zona indicata dal quesito. L'area voluta vale quindi 25*, che è pure il numero delle latte di colore richiesto.*

Risposta $\boxed{0025}$

Problema 6 – Primi minori di 100 — 35 punti

Quest'anno vincerà il titolo "re dei calcoli" chi per primo saprà trovare la somma di tutti i numeri primi minori di 100 che possano essere espressi come differenza di due cubi perfetti (positivi).

Soluzione:

Consideriamo la sequenza di cubi: 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343. *Abbiamo:*

7 = 8 – 1, 19 = 27 – 8, 37 = 64 – 27, 61 = 125 – 64, 91 = 216 – 125, 343 – 216 = 127.

I primi quattro sono numeri primi, mentre 91 *non lo è e* 127 *è maggiore di* 100.

I primi minori di 100 *esprimibili come differenza di cubi sono quindi:*

7, 19, 37 *e* 61, *la cui somma dà* 124.

Risposta $\boxed{0124}$

Problema 7 – Gioco con sassolini 35 punti

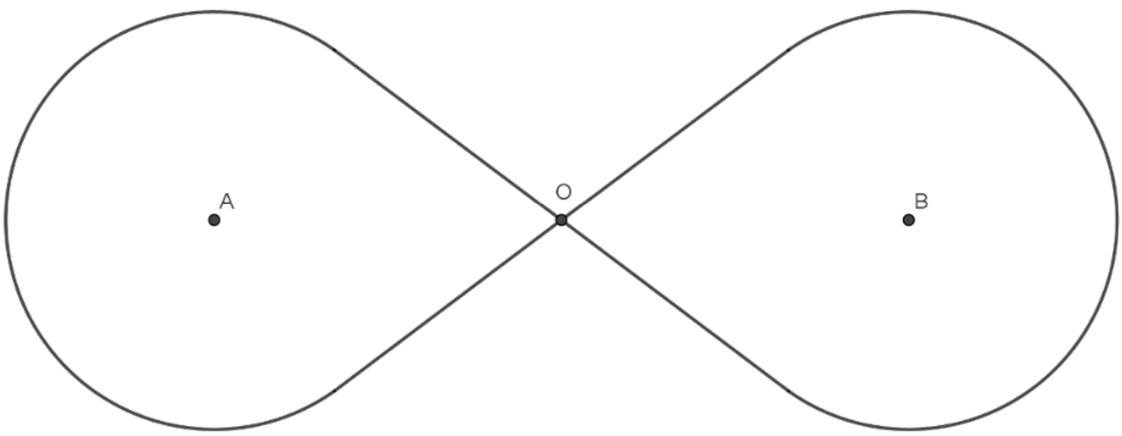
Ettore per passare il tempo lancia 4 sassolini a caso, che, ricadendo a terra, formano un quadrilatero ABCD in cui ogni sassolino si trova in uno dei vertici; Ettore si trova in un punto P interno al quadrilatero, distante dai vertici 2, 4, 6 e 8 metri. Quanto vale l'area massima in m^2 che può avere ABCD?

Soluzione: 50 = (8+2)(4+6)/2 *che è il massimo prodotto possibile considerando le distanze diagonali del quadrilatero.*

Risposta $\boxed{0050}$

Problema 8 – Circuito bici 40 punti

Pierino ha tracciato, nel cortile di casa sua, un percorso a “8” per divertirsi a percorrerlo in bicicletta (vedi figura).



Il tracciato è formato da due archi uguali di circonferenza e da due segmenti (uguali) secantesi in O, loro punto medio, i quali sono tangenti ai rispettivi archi di circonferenza. I centri delle circonferenze sono A e B ed il tracciato è simmetrico rispetto ad O ed alla retta di AB.

Sapendo che i raggi delle circonferenze valgono 3 e che la distanza fra A e B vale 10, calcolare la lunghezza del tracciato a “8”.

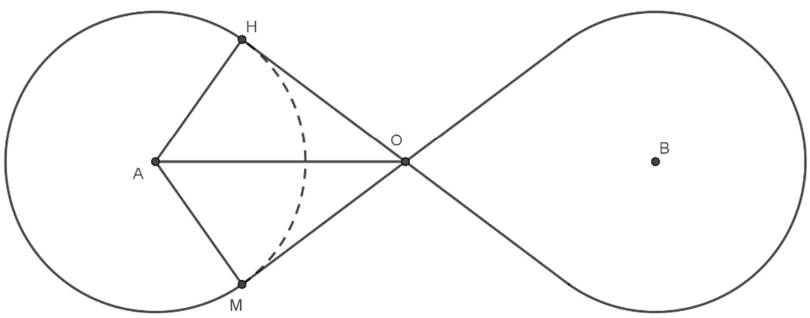
Per i calcoli porre $\pi = 3{,}14$. Per lo stesso fine approssimare tutto alla quarta cifra decimale (ad ogni passaggio).

Dare come risposta il numero formato dalle prime quattro cifre non tenendo conto dell’eventuale virgola.

Soluzione :

Sia AH *il raggio che congiunge* A *con* O *(vedi fig. 1). Esso è perpendicolare ad* HO*, poiché* HO *è tangente alla circonferenza di centro* A.

Fig. 1

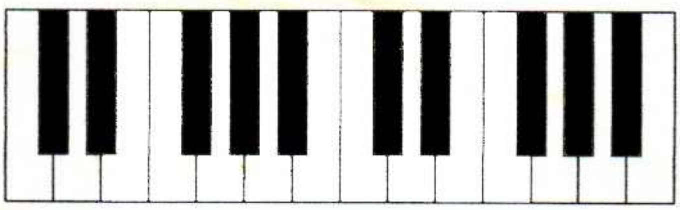


Abbiamo quindi $\overline{AO} = 5$ *e* $\overline{AH} = 3$ *quindi* $\overline{HO} = 4$ *per il teorema di Pitagora. Ora l’angolo* $H\hat{A}O$ *vale* $arctg\dfrac{4}{3} \cong 53{,}1294°$. *Quindi* $H\hat{A}M = 106{,}2588°$. *Il rapporto fra l’arco* *<u>maggiore</u>* HM *e la circonferenza è quindi* $\dfrac{253{,}7412}{360} \cong 0{,}7048$. *La lunghezza del suddetto arco è quindi* $6{,}28 \times 3 \times 0{,}7048 = 13{,}278432$ *approssimata a* 13,2784. *La lunghezza del percorso ciclistico è dunque:* $L = 13{,}2784 \times 2 + 16 = 42{,}5568$.

Risposta $\boxed{4255}$

Problema 9 – Accordi 40 punti

Daniela sta suonando una piccola tastiera con due ottave, come quella rappresentata in figura. I tasti neri suonano le alterazioni (bemolle e diesis) rispetto alla scala diatonica da sette note suonata dai tasti bianchi.



Daniela sa suonare tutti gli accordi di terza maggiore ($1^a – 3^a – 5^a$), i loro primi risvolti ($3^a – 5^a – 8^a$) e persino gli accordi del diavolo ($1^a – 4^a – 5^a$). Si chiede ora quante diverse *triadi* di note (anche con un suono disarmonico) possa suonare sulla propria tastiera.

Soluzione :

Daniela può suonare una triade scegliendo 3 *note distinte tra le* 24 *che ha a disposizione. Può scegliere la prima nota in* 24 *modi, la seconda in* 23, *la terza in* 22. *In questo modo ogni triade viene però suonata* 6 *volte, a seconda dell'ordine in cui vengono scelte le note (*ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA*). Dunque l'effettivo numero di triadi diverse è*

$$\binom{24}{3} = \frac{24!}{3! \cdot 21!} = \frac{22 \cdot 23 \cdot 24}{6} = 22 \cdot 23 \cdot 4 = 2024 .$$

Risposta **2024**

Problema 10 – Numeri palindromi 40 punti

Quanti sono i numeri palindromi di cinque cifre?

Soluzione:

La prima cifra può essere scelta fra 9 *cifre:* 1,2,3,4,5,6,7,8,9. *La seconda e la terza (quella centrale) possono essere scelte fra* 10*: le nove di cui sopra più lo zero. Le rimanenti dipendono da quelle "corrispondenti" scelte (la quarta è uguale alla seconda e la quinta è uguale alla prima). Quindi si hanno* $9 \times 10 \times 10 = 900$ *casi.*

Risposta **0900**

Problema 11 – Il mago Malvus 45 punti

Il mago Malvus dispone in pila 52 carte, con il dorso verso l'alto. Egli separa il mazzetto composto dalle sette carte in cima alla pila, lo capovolge e lo pone sotto la pila. Quindi ora saranno tutte col dorso in alto tranne le ultime sette, con la faccia in alto. Malvus ripete l'operazione finché non si verifica che tutte le carte tornano col dorso in alto. Quanti mazzetti di sette carte ha girato per ritornare al mazzo originale?

Soluzione: 112 = m.c.m. (16,14) *con* 16 *e* 14 *che sono rispettivamente i "cicli" che servono a* 3 *(di* 7*) carte e a* 4 *(di* 7*) carte per tornare alla situazione di partenza.*

Risposta $\boxed{0112}$

Problema 12 – Numero tetraedrico 45 punti

Un **numero tetraedrico**, o **numero piramidale triangolare**, è un numero figurato che rappresenta una piramide con una base triangolare (un tetraedro). Il numero tetraedrico n-esimo è la somma dei primi n numeri triangolari (1, 3, 6, 10,…).

Sapendo che 2024 è un numero tetraedrico, dire qual è il numero (tetraedrico) successivo.

Soluzione:

Sapendo che la formula che produce l'ennesimo numero tetraedrico è $\frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \binom{n+2}{3}$,

cerchiamo di capire in quale posizione si trova 2024.

Dovrà essere $2024 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$, *cioè* $6 \cdot 2024 = n(n+1)(n+2)$.

Scomponiamo in fattori: $6 \cdot 2024 = 2 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 23 = 22 \cdot 23 \cdot 24$. *I fattori sono proprio tre numeri interi consecutivi, con n* = 22. *Quindi* 2024 *è il 22.esimo numero tetraedrico. Il 23.esimo sarà:*

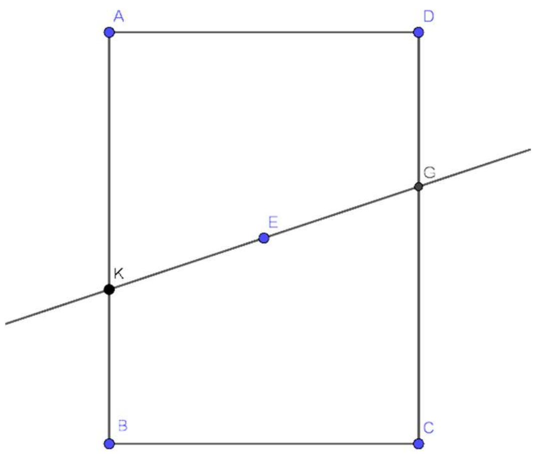
$$T_{23} = \frac{23 \cdot 24 \cdot 25}{6} = 2300.$$

Risposta $\boxed{2300}$

Problema 13 – Foglio piegato 50 punti

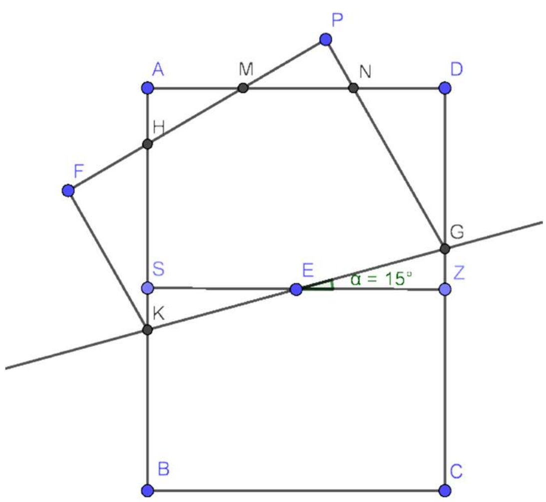
Abbiamo un foglio rettangolare, come nella figura 1 qui sotto, di vertici ABCD. Esso viene piegato (e adagiato sullo stesso piano) lungo la retta KG, passante per il centro del foglio E. La lunghezza di AB è 8 e quella di AD è 6.

Fig. 1



Scegliamo una retta KG la quale formi un angolo di 15° con il segmento (orizzontale) SZ come in figura 2, qui sotto.

Fig. 2



Calcolare la somma delle aree dei triangoli NDG e MNP.

Per i calcoli, dovesse servire, porre $\sqrt{3} = 1{,}732$. Dare come risposta il numero formato dalle prime quattro cifre del risultato omettendo l'eventuale virgola.

Soluzione:

Notiamo che $\mathrm{Z\hat{G}E} = \mathrm{E\hat{G}N} = 75°$, *quindi* $\mathrm{N\hat{G}D} = 30°$ *e* $\mathrm{D\hat{N}G} = 60°$.

Essendo $\overline{\mathrm{EZ}} = 3$, *otteniamo* $\overline{\mathrm{GZ}} = 3tg15° = 3(2-\sqrt{3})$ *e* $\overline{\mathrm{GD}} = 4 - \overline{\mathrm{GZ}} = 4 - 6 + 3\sqrt{3} = 3\sqrt{3} - 2$.

Ancora: $\overline{\mathrm{ND}} = \dfrac{\overline{\mathrm{GD}}}{\sqrt{3}} = \dfrac{3\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}} = \dfrac{9-2\sqrt{3}}{3}$. *Infine*

$$Area(\mathrm{GDN}) = \frac{\overline{\mathrm{ND}} \cdot \overline{\mathrm{GD}}}{2} = \frac{9-2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}-2}{2} = \frac{31\sqrt{3}-36}{6}$$

I triangoli (rettangoli) NGD *e* MNP *sono simili (con angoli opposti al vertice).*

Osserviamo che $\overline{\mathrm{GN}} = 2\overline{\mathrm{ND}}$, *quindi* $\overline{\mathrm{GN}} = \dfrac{18-4\sqrt{3}}{3}$, *da cui*

$$\overline{\mathrm{PN}} = \overline{\mathrm{GP}} - \overline{\mathrm{GN}} = \overline{\mathrm{CG}} - \overline{\mathrm{GN}} = 8 - \overline{\mathrm{GD}} - \overline{\mathrm{GN}} = 8 - 3\sqrt{3} + 2 - \frac{18-4\sqrt{3}}{3} = \frac{12-5\sqrt{3}}{3}.$$

Otteniamo $\overline{\mathrm{PM}} = \overline{\mathrm{PN}}\sqrt{3} = \dfrac{12\sqrt{3}-15}{3} = 4\sqrt{3} - 5$.

$$Area(\mathrm{MPN}) = \frac{12-5\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{4\sqrt{3}-5}{2} = \frac{73\sqrt{3}-120}{6}.$$

La somma delle aree richiesta è quindi $S = \dfrac{104\sqrt{3}-156}{6} = \dfrac{52\sqrt{3}-78}{3} = 4{,}0213333\ldots$

Risposta $\boxed{\mathbf{4021}}$

Problema 14 – Caso 2024 per l'ispettore di M. Smullyan 50 punti

In un caso di furto sono coinvolti quattro imputati, A, B, C, D. Vengono accertati i seguenti quattro fatti:

1) Se uno, fra A e B, è innocente, allora C è colpevole.
2) Se B è colpevole, almeno uno, tra A e D, è stato suo complice.
3) Se C è innocente, allora B è colpevole.
4) Se almeno uno fra B e D è colpevole, allora A è innocente.

Alla luce dei suddetti fatti, calcolare la probabilità P(A) che A sia colpevole.

Si ipotizzi l'equiprobabilità degli eventi elementari che verranno individuati.

Dare come risposta la parte intera di $1000 \times \mathrm{P(A)}$.

Soluzione:

Formalizziamo dapprima le frasi.

Si intenda A = “A è colpevole” , ecc. 0 = FALSO

$\neg$ A = “A è innocente”, ecc. 1 = VERO

Avremo:

1) $[(\neg A) \vee (\neg B)] \rightarrow C$
2) $B \rightarrow (A \vee D)$
3) $\neg C \rightarrow B$
4) $(B \vee D) \rightarrow \neg A$

Costruiamo la tavola di verità:

											1	2	3	4	
	A	B	C	D	nA	nB	nC	nA∨nB	A∨D	B∨D	(nA∨nB)⇒C	B⇒(A∨D)	nC⇒A	(B∨D)⇒nA	
1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	
2	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	
3	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	x
4	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	x
5	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	
6	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	
7	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	
8	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	x
9	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	
10	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	
11	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	x
12	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	
13	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	
14	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	
15	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	
16	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	

Poiché i fatti (1), (2), (3), (4) *sono stati accertati (quindi supposti “veri”), considerando quindi solo le righe (in rosso su sfondo giallo) della tabella corrispondenti alle situazioni in cui tutte le* 4 *frasi hanno valore di verità* 1, *si nota che, nei riguardi di* A, *si ha* 1 *caso “*1*” su* 4 *complessivi (considerati “equiprobabili”, date le nostre informazioni).*

La probabilità cercata è quindi $P(A) = 1/4 = 0{,}25$ *da cui* $1000 \times P(A) = 250$. **Risposta** **0250**

Problema 15 – Prodotto di funzioni 60 punti

Dotto si sta esercitando con i numeri. Ha preso la funzione $f(n) = \dfrac{200-2n}{n}$ ed ha calcolato il prodotto $f(1) \cdot f(2) \cdot \ldots \cdot f(99)$.

Quali sono le ultime due cifre che ha scritto Dotto (cioè le due più a destra)?

Soluzione:

Il prodotto suddetto si può scrivere così:

$$\frac{200-2}{1} \cdot \frac{200-4}{2} \cdot \frac{200-6}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{200-98}{49} \cdot \frac{200-100}{50} \cdot \frac{200-102}{51} \cdot \ldots \cdot \frac{6}{97} \cdot \frac{4}{98} \cdot \frac{2}{99}, \text{ cioè}$$

$$\frac{198}{1} \cdot \frac{196}{2} \cdot \frac{194}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{102}{49} \cdot \frac{100}{50} \cdot \frac{98}{51} \cdot \ldots \cdot \frac{6}{97} \cdot \frac{4}{98} \cdot \frac{2}{99} = 2^{99},$$

infatti il primo numeratore è il doppio dell'ultimo denominatore, il secondo numeratore è il doppio del penultimo denominatore e così via fino alla 49.esima frazione. Simmetricamente per le ultime 49 frazioni. Quella centrale, la 50.esima, vale proprio 2.

Le successive potenze di 2 *danno in sequenza numeri che terminano, in ordine, con* 2, 4, 8, 6. *Abbiamo quindi cicli di quattro cifre.*

La 99.esima potenza di 2 *terminerà con la cifra* 8, *poiché è* 99 = 96 + 3 = 4×6 + 3. *La terza posizione del ciclo contempla appunto la cifra* 8.

Consideriamo ora le ultime due cifre delle successive potenze del 2 *di cui l'ultima sia proprio 8. Abbiamo la sequenza:* 08, 28, 48, 68, 88.

Poiché 08 *parte in terza posizione,* 28 *sarà in settima,* 48 *in undicesima,* 68 *in quindicesima e* 88 *in diciannovesima. Proseguendo di questo passo (a gruppi di cinque elementi) e tenendo conto che* 99 = 19 + 80*, le cifre cercate formano il numero* 88.

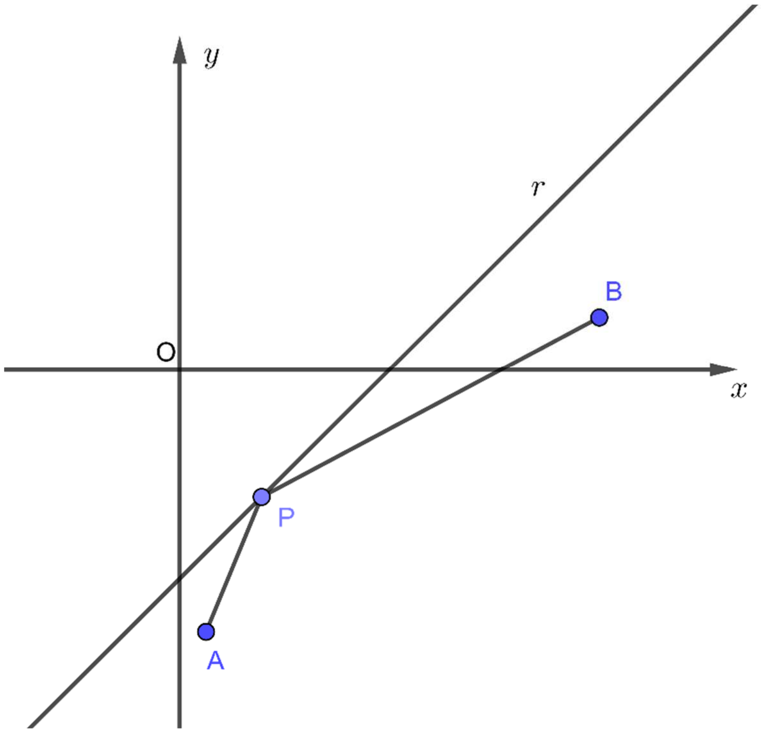
Risposta $\boxed{0088}$

Problema 16 – Colpo da biliardo 60 punti

In riferimento alla figura, puramente indicativa, di cui sotto (situata per comodità in un piano cartesiano), si immagini che la retta *r* sia l'equivalente di una sponda di un biliardo e che una pallina (pensata puntiforme) sia in A ed una in B. Detto P il punto di contatto sulla sponda, dopo la battuta, della pallina in A la quale colpisce in seguito la pallina in B (e non viceversa), calcolare la lunghezza di AP.

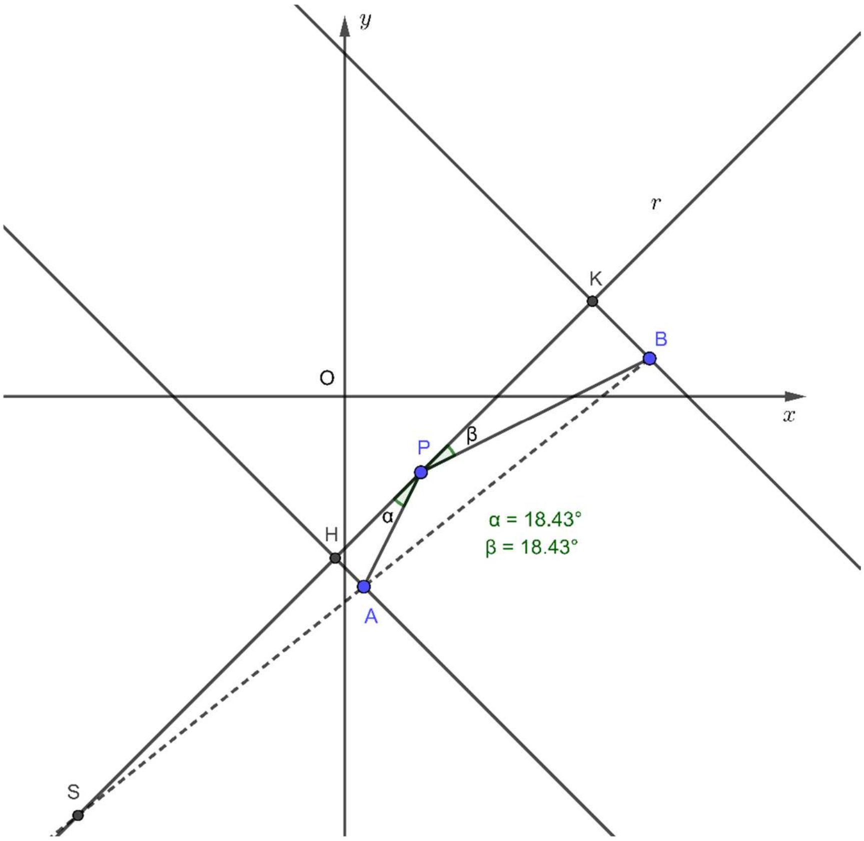
L'equazione cartesiana della retta/sponda è $y = x - 8$. le coordinate di A sono (1, –10) e quelle di B sono (16, 2).

Dare come risposta il numero formato dalle prime 4 cifre del risultato omettendo l'eventuale virgola.



Soluzione :

Riferiamoci alla figura seguente in cui sono evidenziate già le situazioni essenziali.



Detti H *e* K *i punti di intersezione rispettivamente della perpendicolare da* A *e da* B *alla retta r, dovrà essere* $\mathrm{H\hat{P}A} = \mathrm{K\hat{P}B}$ *affinché la pallina in* A *colpisca la pallina in* B.
La retta di AH *avrà equazione* $y + 10 = -(x - 1)$*, cioè* $y = -x - 9$.
La retta di BK *avrà equazione* $y - 2 = -(x - 16)$*, cioè* $y = -x + 18$.
Le coordinate di H *si troveranno risolvendo il sistema:*

$\begin{cases} y = -x - 9 \\ y = x - 8 \end{cases}$. *Otteniamo* $\mathrm{H}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{17}{2}\right)$.

Quindi $\overline{\mathrm{AH}} = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-10 + \frac{17}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$.

Le coordinate di K *si troveranno risolvendo il sistema:*

$\begin{cases} y = -x + 18 \\ y = x - 8 \end{cases}$. *Otteniamo* $\mathrm{K}(13,5)$.

Quindi $\overline{\mathrm{BK}} = \sqrt{(16 - 13)^2 + (2 - 5)^2} = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}$.

Per la similitudine dei triangoli HPA *e* KPB *dovrà essere* $\frac{\overline{\mathrm{AP}}}{\overline{\mathrm{BP}}} = \frac{\overline{\mathrm{AH}}}{\overline{\mathrm{BK}}}$*, quindi*

$\frac{\sqrt{(a-1)^2 + (b+10)^2}}{\frac{3}{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(a-16)^2 + (b-2)^2}}{3\sqrt{2}}$*, da cui, con vari calcoli, otteniamo*

$3a^2 + 3b^2 + 24a + 84b + 144 = 0$. *Poiché è* $b = a - 8$*, si ricava (semplificando) l'equazione* $a^2 + 10a - 56 = 0$ *le cui soluzioni sono* $a_1 = -14$ *e* $a_2 = 4$ *con* $b_1 = -22$ *e* $b_2 = -4$.
La prima soluzione (– 14, – 22) *individuerebbe il punto* S *in figura: proporrebbe una situazione in cui la pallina in* B *colpisce la pallina in* A *e la fa carambolare in* S*: non accettabile.*
La soluzione è quindi $a = 4$ *e* $b = -4$*, da cui* P(4, – 4).
Per rispondere al quesito proposto dal testo, calcoliamo infine

$\overline{\mathrm{AP}} = \sqrt{(1-4)^2 + (-10+4)^2} = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \cong 6{,}7082$.

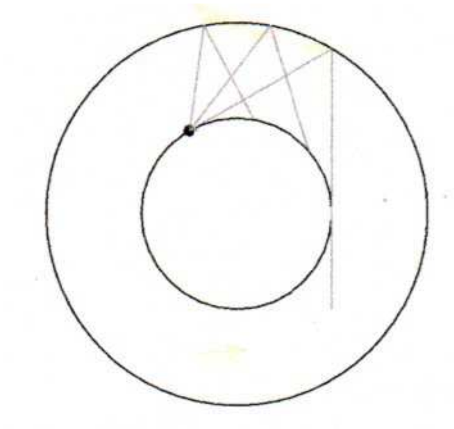
Risposta $\boxed{6708}$

Problema 17 – Onde radio 65 punti

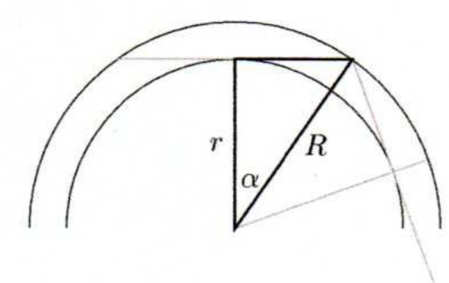
Le onde radio, entro l'ordine dei Megahertz, vengono riflesse dalla ionosfera; questo rende possibile la propagazione delle stesse superando la curvatura terrestre.
Ignaro tanto del problema della curvatura terrestre quanto della soluzione presentata dalla ionosfera, Guglielmo Marconi (nato 150 anni fa) riuscì a trasmettere onde radio a distanze che erano ritenute irraggiungibili.
Supponiamo che la Terra si una sfera di raggio 6366 *km* e che la ionosfera sia una sfera concentrica alla Terra. Supponiamo inoltre che un'onda radio emessa al Polo Nord venga riflessa per 6 volte dalla ionosfera, raggiungendo infine il Polo Sud. A quanti chilometri dalla superficie terrestre si troverebbe la ionosfera? Approssimare i calcoli alla parte intera del risultato.

Soluzione:

Le onde che raggiungono la ionosfera vengono riflesse con lo stesso angolo di incidenza e ritornano sulla Terra con lo stesso angolo con cui erano state inviate; se un'onda viene emessa in direzione tangente alla superficie l'onda riflessa sarà di nuovo tangente alla superficie e potrà venire riflessa ulteriormente.



Unendo al centro della Terra un punto di tangenza e un punto di riflessione consecutivi si ottiene un triangolo rettangolo con l'angolo al centro α, cateto adiacente pari al raggio r della terra e ipotenusa pari al raggio R della ionosfera.



Dal Polo Nord si arriva al Polo Sud dopo 6 *riflessioni, dunque dopo aver coperto un angolo* $12\alpha = 180°$*; questo significa che* $\alpha = 15°$ *e che*

$$r = R\,cos(15°)$$

$$R = \frac{r}{cos(15°)} = 6590\ km$$

$$h = R - r = 224\ km$$

Risposta 0224

Problema 18 – Calcolo enigmatico 2024 **70 punti**

$$\begin{array}{ccccc} ABCD & - & EF & = & ACMD \\ \times & & : & & + \\ GF & \times & C & = & EF \\ \hline HFLCF & : & GF & = & ABCD \end{array}$$

A lettera uguale corrisponde cifra uguale (e a lettera diversa cifra diversa).

La prima cifra non è mai lo zero (come semplicità comanda).

Quale numero corrisponde alla stringa AFGB?

Soluzione:

Dalla 1^a sottrazione orizzontale e dalla 1^a moltiplicazione verticale si deduce **F = 0**.

Si deduce ancora $E = G \times C$ *(prodotto orizzontale), quindi* $C \neq 1$, $G \neq 1$ *(per le ipotesi del quesito) e* $B = C + 1$ *(somma verticale). Con queste considerazioni si trova pure* $2 \leq C \leq 6$. *Vediamo i vari casi:*

1) $C = 2 \Rightarrow B = 3$, $E = 2G$. *Vi è solo la possibilità* $G = 4$ *da cui otteniamo* $E = 8$, $M = 4$ *(somma vert.), non accettabile.*
2) $C = 3 \Rightarrow B = 4$, $E = 3G$. *Vi è solo la possibilità* $G = 2$ *da cui otteniamo* $E = 6$, $M = 7$. *Troviamo pure, dalla 1^a moltiplicazione verticale, che* $G \times D$ *dovrebbe produrre un numero pari, contro la "presenza" di* C *dispari: impossibile.*
3) $C = 4 \Rightarrow B = 5$, $E = 4G$. *Vi è solo la possibilità* $G = 2$ *da cui otteniamo* $E = 8$, $M = 6$. *Troviamo pure* $D = 7$, $L = 9$ *(prodotto vert.). Restano 2 possibilità:* $A = 1$ *e* $H = 3$ *oppure viceversa. Le cifre* "1" *e* "3" *sono proprio le mancanti. Deduciamo che non può essere* $A = 3$, *poiché produrrebbe* $H = 7$, *non accettabile. Quindi* $A = 1$ *e* $H = 3$. *Soluzione trovata.*
4) $C = 5 \Rightarrow B = 6$, $E = 5G$. *Vi è solo la possibilità* $G = 1$, *non accettabile.*
5) $C = 6 \Rightarrow B = 7$, $E = 6G$. *Vi è solo la possibilità* $G = 1$, *non accettabile.*

La soluzione (unica) è quindi: **A =1, B = 5, C = 4, D = 7, E = 8, F = 0, G = 2, H = 3, L = 9, M = 6**.

Risposta $\boxed{1025}$

Problema 19 – Rifornimento alla fontana **70 punti**

Abbiamo due contenitori, uno da 1,5 litri; l'altro da 10 litri e una fontana che butta sempre acqua. Le operazioni che possiamo fare sono:

a) svuotare (completamente) un contenitore del suo contenuto;
b) versare il contenuto da un contenitore all'altro, o finché il primo è (completamente) vuoto, o finché la destinazione è (completamente) piena;
c) riempire (completamente) un contenitore alla fontana.

Quante operazioni sono necessarie (come minimo) per partire dai due contenitori vuoti ed arrivare ad avere esattamente 5 litri nei due contenitori?

[Rispondere 0 se nessuna sequenza di operazioni può condurre alla condizione finale richiesta]

Soluzione:

Chiamiamo A il contenitore piccolo e B quello grande.

Si può procedere così:

1) *Riempiamo A e versiamo tutto in B per 6 volte:* **12** *operazioni. In B ci sono 9 litri d'acqua.*
2) *Riempiamo A e versiamo in B:* **2** *operazioni. B è pieno e in A vi è mezzo litro d'acqua.*
3) *Svuotiamo B e versiamo A in B:* **2** *operazioni. In B vi è mezzo litro di acqua.*
4) *Riempiamo A e svuotiamolo in B per due volte:* **4** *operazioni. In A vi sono ora 3,5 litri d'acqua.*
5) *Riempiamo A:* **1** *operazione.*

A questo punto abbiamo 1,5 litri d'acqua in A e 3,5 in B. Totale 5 litri, come si voleva.

Abbiamo effettuato in totale **21** *operazioni.*

Risposta $\boxed{0021}$

Problema 20 – Anni bizantini **80 punti**

Un *anno bizantino* è un anno di quattro cifre che è multiplo della differenza tra il numero formato dalle sue prime due cifre e il numero formato dalle sue ultime due cifre. Ad esempio 2024 è un anno (numero) bizantino perché è multiplo di 24 – 20 = 4.
Quanti sono gli anni bizantini?

Soluzione :

Indichiamo con a il numero formato dalle prime due cifre, con b il numero formato dalle ultime due cifre e con d = $|a-b|$ *la loro differenza.*

Osserviamo innanzitutto che a deve essere multiplo di d.
Infatti avremo $b = a \pm d$ *e l'anno* $n = 100a + b = 101a \pm d$ *è multiplo di d se e solo se* $101a$ *è multiplo di d; siccome* 101 *è un numero primo, allora a stesso è multiplo di d.*
Gli anni bizantini sono allora di due tipi:

- *quelli con a = d·h e b = a – d = d(h –1)*
- *quelli con a = d·h e b = a + d = d(h +1)*

Abbiamo inoltre due condizioni: $10 \le a < 100$ *e* $0 \le b < 100$.
Contiamo ora le coppie (d,h) di numeri interi strettamente positivi che soddisfano queste condizioni. Al variare di d,

- *per gli anni del primo tipo abbiamo* $dh > 9$ *e* $dh \le 99$*, quindi*

$$\frac{9}{d} < h \le \frac{99}{d}$$

dunque i valori di h sono in numero di

$$\left[\frac{99}{d}\right] - \left[\frac{9}{d}\right]$$

(dove $[x]$ *indica la parte intera di x).*

- *per gli anni del secondo tipo abbiamo anche* $d(h+1) \le 99$*, quindi*

$$\frac{9}{d} < h \le \frac{99}{d} - 1$$

dunque i valori di h sono in numero di

$$\left[\frac{99}{d}\right] - \left[\frac{9}{d}\right] - 1$$

esattamente uno in meno rispetto a prima; in totale ci sono esattamente 99 *anni del secondo tipo in meno rispetto agli anni del primo tipo.*
Contiamo ora tutti gli anni del primo tipo, ovvero tutte le coppie (d,h) di numeri strettamente positivi tali che $dh > 9$ *e che* $dh \le 99$.
Per velocizzare i calcoli, osserviamo che d e h non possono essere entrambi maggiori di 9 *e consideriamo i seguenti insiemi di coppie (d,h):*
A le coppie con $dh \le 99$ *e con* $d \le 9$ *che sono*

$$A = \left[\frac{99}{1}\right] + \left[\frac{99}{2}\right] + \left[\frac{99}{3}\right] + \left[\frac{99}{4}\right] + \left[\frac{99}{5}\right] + \left[\frac{99}{6}\right] + \left[\frac{99}{7}\right] + \left[\frac{99}{8}\right] + \left[\frac{99}{9}\right] =$$

$$= [99] + [49{,}5] + [33] + [24{,}...] + [19{,}...] + [16{,}...] + [14{,}...] + [12{,}...] + [11] =$$

$$= 99 + 49 + 33 + 24 + 19 + 16 + 14 + 12 + 11 = 277$$

B le coppie con $dh \le 99$ *e con* $h \le 9$*, che sono tante quante le coppie di A,*

$$B = A = 277$$

C le coppie con $d \le 9$ *e con* $h \le 9$*, (che automaticamente soddisfano* $dh \le 99$*), che abbiamo contato sia in A che in B e che sono:*

$$C = 9 \cdot 9 = 81$$

D le coppie con dh ≤ 9, *che non avremmo dovuto contare e che sono:*

$$D = \left[\frac{9}{1}\right] + \left[\frac{9}{2}\right] + \left[\frac{9}{3}\right] + \left[\frac{9}{4}\right] + \left[\frac{9}{5}\right] + \left[\frac{9}{6}\right] + \left[\frac{9}{7}\right] + \left[\frac{9}{8}\right] + \left[\frac{9}{9}\right] =$$

$$= 9 + 4 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 23.$$

Dunque gli anni bizantini del <u>*primo tipo*</u> *sono*

$$277 + 277 - 81 - 23 = 450.$$

Gli anni bizantini del <u>*secondo tipo*</u> *sono*

$$450 - 99 = 351$$

e il numero totale di anni bizantini è

$$450 + 351 = 801.$$

Risposta $\boxed{\mathbf{0801}}$